MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE
BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
12

DIE QUADRATUR DES KREISES

VON
EUGEN BEUTEL
PROFESSOR AM REFORMREALGYMNASIUM
IN STUTTGART

ZWEITE AUFLAGE
MIT 11 FIGUREN IM TEXT

1920
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Das vorliegende Bändchen verfolgt den Zweck, bei dem Leser Sinn und Verständnis für die Probleme zu wecken, an denen die Mathematik reich ist und zu deren Lösung die Geistesarbeit von Jahrhunderten, ja, wie die Geschichte der Quadratur des Kreises zeigt, von Jahrtausenden notwendig war. Auf Vollständigkeit kann allerdings kein Anspruch erhoben werden; doch habe ich mich bemüht, alle diejenigen mathematischen Leistungen anzuführen – wenn auch öfters nur historisch –, die für die Lösung des Problems in irgendeinem Sinne einen Fortschritt bedeuten.

Mögen sich durch die Lektüre dieser Schrift zahlreiche Leser bewogen fühlen, sich eingehender mit dem Studium der Geschichte der Mathematik zu befassen, die ja auch neuerdings an den höheren Schulen mehr und mehr die ihr gebührende Beachtung findet.

Vaihingen-Enz, im März 1913. **E. Beutel.**

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Dem Wunsch des Verlags entsprechend wurden an verschiedenen Stellen mit Rücksicht auf die Papierteuerung der Gegenwart Kürzungen vorgenommen, denen auch das Namenverzeichnis und mehrere in Aussicht genommene Erweiterungen zum Opfer gefallen sind. Ich hoffe jedoch, daß trotz der knappen Darstellung die Lesbarkeit des Bändchens sich nicht vermindert hat.

Stuttgart, im Januar 1920. **E. Beutel.**

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

I. Einleitung

II. Der elementargeometrische Zeitraum

III. Der infinitesimale Zeitraum

IV. Der algebraische Zeitraum

V. Die endgültige Erledigung des Problems

I. EINLEITUNG

1. DIE URSACHEN DER BERÜHMTHEIT DES PROBLEMS

Die Mathematik ist reich an berühmten Problemen; keines aber hat eine solche geradezu sprichwörtlich gewordene Berühmtheit erreicht wie die *Quadratur des Kreises*, keines hat eine solch große Zahl von Bearbeitern und, wie wir gleich hinzufügen müssen, von mißglückten Lösungsversuchen gefunden wie das unsrige.

Es sind verschiedene *Ursachen*, denen die Kreisquadratur ihre Berühmtheit verdankt. Nicht als ob der Wert dieses Problems für die Wissenschaft oder für ihre Anwendungen von hervorragender Bedeutung wäre; es gibt in der Mathematik viele Probleme, die wissenschaftlich weit interessanter und praktisch ungemein wertvoller sind, die trotzdem nicht weit über den Kreis der Fachgenossen hinaus bekannt geworden sind. Dagegen hat das Problem von der Quadratur des Kreises bis in die letzten Jahre herein immer wieder Bearbeiter gefunden. Da diese häufig fachwissenschaftlich wenig durchgebildet waren, so konnte ihnen die Lösung der Aufgabe natürlich nicht gelingen aus dem einfachen Grunde, weil, wie wir später sehen werden, eine Lösung in dem Sinne, wie Laien es meinen, unmöglich ist.

Die *Anziehungskraft* des Problems liegt einesteils darin, daß die Begriffe Kreis und Quadrat fast jedermann geläufig sind; jeder glaubt zu wissen, was unter dem Flächeninhalt einer begrenzten Figur zu verstehen ist, und so scheint die Aufgabe: „einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln“ beim ersten Anblick nicht allzu schwer. Ferner hat die Tatsache, daß die Lösung dieser Aufgabe von den hervorragendsten Mathematikern aller Zeiten vergeblich versucht worden ist, offenbar eine nicht geringe Anziehungskraft auf die Mathematiker ausgeübt, und auch der große Kreis der Nichtmathematiker scheint hiervon angesteckt worden zu sein. Hiezu kam nun ein weiteres. Nicht nur winkte dem Glücklichen, der die Lösung fand, der Lorbeer einer fast unsterblichen Berühmtheit, sondern im Mittelalter fand die Ansicht viele Anhänger, daß derjenige, dem die Lösung dieses mathematischen Rätsels glücke, den Zusammenhang der Vorgänge der irdischen Erscheinungswelt besser verstehe und vielleicht sogar Einblick in übernatürliche Geschehnisse erlange. Man betrachtete das Problem der Quadratur des Kreises als den mathematischen Stein der Weisen.

Endlich war bis in die neueste Zeit herein der Glaube verbreitet, daß große Akademien, das englische Parlament (wegen des vermeintlichen Zusammenhangs mit der Auffindung der geographischen Länge auf hoher See) oder irgendeine einflußreiche Persönlichkeit hohe Geldpreise für die Lösung der Aufgabe ausgesetzt hätten; denn es hätte ja sonst nach der Ansicht vieler mathematischer Laien keinen Zweck gehabt, daß selbst hervorragende Gelehrte sich mit der Lösung des Problems abgemüht haben. Die Erlangung einer großen Geldprämie mag neben einem gewissen Maß von Ehrgeiz häufig die Haupttriebfeder der Bemühungen vieler „Quadratoren" gewesen sein.

Es ist äußerst unterhaltend und belustigend, die Stoßseufzer solcher Quadratoren zu lesen, die, obwohl sie von der absoluten Genauigkeit ihrer Konstruktion überzeugt waren, doch die von ihnen erwartete allgemeine Anerkennung nicht fanden. So z. B. verfluchte der Franzose Basselin (18. Jahrh.) die undankbare Mitwelt in der Hoffnung, von der Nachwelt anerkannt zu werden. Mehrfach setzten die Quadratoren Preise aus für denjenigen, der einen Fehler in ihrer Lösung finde: so mußte der Franzose Mathulon für eine mißglückte Kreisquadratur den von ihm für den Nachweis seines Fehlers festgesetzten Preis von 1000 Talern wirklich ausbezahlen, und der polnische Oberstleutnant Corsonich setzte 50 Dukaten für denselben Zweck aus. In einer im Jahr 1840 erschienenen Schrift werden die Leistungen von Archimedes als Betrug gekennzeichnet, und nachdem der Verfasser dem lieben Gott gedankt hat, daß er gerade ihn auserwählt habe, „die langgesuchte, mit Inbrunst begehrte, von Millionen betastete Lösung des mathematischen Phänomen-Problems" zu lösen, sagt er: „Es beliebte nun einmal so der Mutter Natur, dies mathematische Kleinod dem menschlichen Forschen vorzuenthalten, bis es ihr gefiel, die Wahrheit der Einfalt zu übergeben." Eine „genaue" Kreisquadratur erblickte im Jahre 1893 das Licht der Öffentlichkeit unter dem stolzen Titel: „Die Wahrheit schreitet einfach, aber majestätisch vor und zermalmt ihre Gegner"; trotzdem war die Lösung falsch. Kurz vor Ausbruch des Weltkriegs ging dem Verfasser aus Südamerika das Ergebnis der Bemühungen eines Kreisquadrators zu, der jedoch durch Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts zu zwei verschiedenen Ergebnissen gelangte.

So ist es nicht verwunderlich, daß schon im Jahre 1775 die Pariser Akademie der Wissenschaften einen Beschluß faßte, „Lösungen der Quadratur des Kreises nicht mehr zu untersuchen". Andere Akademien folgten, aber trotzdem ist die Zahl der Quadratoren bis in die Neuzeit herein nicht ausgestorben; neben dem Gefühl verkannter Größe erhält sich bei ihnen das Bewußtsein, daß die Mathematikerzunft ihnen nur aus Neid die gebührende Anerkennung versage.

Doch ist es heutzutage unleugbare Tatsache, daß vielleicht infolge der stärkeren Betonung der Mathematik im Schulunterricht jeder gebildete Nichtmathematiker das Problem wenigstens dem Namen nach kennt und weiß, daß es unlösbar ist oder daß bis jetzt auch den berühmtesten Mathematikern eine Lösung nicht geglückt ist. So findet sich häufig in nichtmathematischen Schriften, ja sogar in unseren Zeitungen heute noch die Redensart: „die Quadratur des Zirkels versuchen" in dem Sinne „etwas Unmögliches tun" oder „etwas außerordentlich Schwieriges mit unzulänglichen Mitteln erledigen wollen". Auch Bismarck hat, um nur ein Beispiel anzuführen, in seinen Reichstagsreden hie und da von der Quadratur des Kreises in diesem bildlichen Sinn gesprochen.

2. GENAUE FORMULIERUNG DES PROBLEMS; ÜBERBLICK ÜBER DIE VERSCHIEDENEN ZEITRÄUME DER GESCHICHTE DER KREISQUADRATUR

Unter der *Zahl* π verstehen wir *das Verhältnis des Kreisumfangs u zum Durchmesser d*, also ist $u = \pi d$. Da alle Kreise ähnliche Figuren sind, so ist $u_1 : u_2 = d_1 : d_2$ und

$J_1 : J_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Hieraus folgt $J = \lambda r^2$, wo λ eine noch zu ermittelnde Konstante ist. Da aber $J = \frac{1}{2} r u$ (wo r der Kreisradius ist), so ist wegen $u = \pi d$ die Konstante $\lambda = \pi$. Die *Zahl* π gibt also auch *das Verhältnis des Kreisinhalts zum Quadrat über dem Radius* an. Der Wert der Zahl π ist

$$3{,}1415926535897\ldots.$$

Aus der Formel $J = \frac{1}{2} r u$ ergibt sich, daß man jeden Kreis in ein inhaltgleiches Dreieck verwandeln kann, dessen Grundlinie gleich dem Kreisumfang u und dessen Höhe gleich dem Kreisradius r ist. Dieses Dreieck läßt sich in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, und damit wäre die Aufgabe gelöst. *Das Problem der Quadratur des Kreises kommt also* auf die Konstruktion des Umfangs des Kreises, d. h. *auf eine Rektifikation hinaus.* Die Geometer des Altertums betrachteten nur solche Aufgaben als konstruierbar, die sich allein *durch eine endliche Zahl von Operationen unter Anwendung von Zirkel und Lineal* lösen lassen. Die Lösung elementar-geometrischer Konstruktionsaufgaben läuft schließlich auf die wiederholte Ausführung der beiden folgenden Aufgaben hinaus, die sich nicht auf einfachere zurückführen lassen:

a) durch 2 Punkte eine Gerade zu ziehen;

b) um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren.

Die Aufgabe a) wird durch alleinige Anwendung eines Lineals, die Aufgabe b) durch Anwendung eines Zirkels gelöst.

Zu dieser geometrischen Festsetzung muß noch eine arithmetische treten.

Alle Zahlen werden eingeteilt in *rationale Zahlen* und in *irrationale Zahlen.* Die rationalen Zahlen umfassen das Gebiet der positiven und negativen ganzen Zahlen und die Brüche. Bei den irrationalen Zahlen unterscheidet man *algebraische* und *transzendente* Zahlen. Erstere sind die Wurzeln einer Gleichung beliebig hohen Grades mit rationalen Koeffizienten. Rationale Zahlen erhalten wir durch ein- oder mehrfache Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division positiver oder negativer ganzer Zahlen. Unter Zugrundelegung einer Einheitsstrecke sind diese vier Operationen mit

Zirkel und Lineal ausführbar. Die einfachste irrationale Operation ist das Ausziehen von Quadratwurzeln. Jeder Ausdruck von der Form $a + b\sqrt{c}$ ist geometrisch konstruierbar. Bei den höheren irrationalen Operationen ist eine Konstruktion nur dann möglich, wenn man mit einer endlichen Anzahl von Quadratwurzeln auskommt.[1]) Auf die endliche Anzahl ist hierbei Wert zu legen; *eine unendliche Anzahl von rationalen Operationen oder von Quadratwurzelausziehungen gibt* im allgemeinen[2]) eine in unserem Sinne nicht mehr geometrisch konstruierbare Größe. Wir können also sagen:

Ein analytischer Ausdruck, d. h. jede nach einer gegebenen Rechenvorschrift gebildete Buchstaben- oder Zahlenverbindung, *ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn er aus den gegebenen Größen durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen und Quadratwurzeln abzuleiten ist.*

Wenden wir uns nach diesen allgemeinen Bemerkungen nun zu unserem eigentlichen Gegenstand. In der Geschichte der Kreisquadratur lassen sich drei Zeiträume unterscheiden:

I. Der elementar-geometrische Zeitraum von den Anfängen mathematischer Untersuchungen bis zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung. Der Kreisumfang wird näherungsweise als rationales Vielfaches des Kreisdurchmessers mit jeder nur wünschenswerten Genauigkeit berechnet; die näherungsweise Quadratur des Zirkels kann mit jeder denkbaren Genauigkeit konstruktiv ausgeführt werden.

II. Der infinitesimale Zeitraum von 1654—1766, in welchem die Zusammenhänge der Zahl π mit anderen Funktionen erkannt werden; π wird durch analytische Ausdrücke mittels einer unendlichen Reihe von Operationen dargestellt.

---

1) Ist a eine gegebene Strecke, so ist der Ausdruck $x = a\sqrt[3]{2}$ nicht unter Anwendung von Zirkel und Lineal konstruierbar. Aus $x = a\sqrt[3]{2}$ folgt $x^3 = 2a^3$. Diese Gleichung entspricht dem ebenfalls berühmten Problem der Würfelverdoppelung.

2) So z. B. gibt die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ in inf. für eine rationale Zahl x zwischen -1 und $+1$ die rationale Zahl $\frac{1}{1-x}$; ebenso stellt jeder (unendliche) periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl dar.

III. Der algebraische Zeitraum 1766—1882, in dem das eigentliche Wesen der Zahl π erkannt wird. Endgültig erledigt wird das Problem 1882 durch Lindemann, Professor der Mathematik an der Universität München, der nachweist, daß π eine transzendente Zahl ist, daß also die Quadratur des Kreises durch Zirkel und Lineal unmöglich ist; in der Folgezeit wird der Lindemannsche Beweis durch die Arbeiten deutscher Mathematiker noch weiter vereinfacht.

II. DER ELEMENTAR-GEOMETRISCHE ZEITRAUM

3. DIE ÄGYPTER, CHINESEN, ÄLTESTEN INDER UND BABYLONIER

In den Uranfängen der mathematischen Wissenschaft, in der sog. naiven Zeit, suchte man die Aufgabe, einen Kreis in ein inhaltgleiches Quadrat zu verwandeln oder, was ja auf dasselbe hinauskommt, den Umfang eines Kreises als Strecke darzustellen, durch einfaches Messen oder in noch roherer Weise durch Abschätzen zu lösen.

Schon in dem ältesten mathematischen Buch, dem im Britischen Museum in London aufbewahrten *Papyrus Rhind*[1]), findet sich ein Näherungswert für π. In diesem sog. Rechenbuch des **Ägypters** Ahmes oder nach neuerer Lesart Jahmose [die ägyptischen Hieroglyphen sind eine reine Konsonantenschrift; die Vokale lassen sich nur durch Vergleichung von ägyptischen Eigennamen in anderen alten Sprachen ungefähr ermitteln], das wahrscheinlich ein um 1600 bis 1700 v. Chr. entstandenes Schulheft ist, und das nach eigenen Angaben des Verfassers auf noch ältere Quellen zurückgreift, findet sich folgende Regel zur Bildung eines dem Kreise flächengleichen Quadrats: Die Quadratseite ist $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers. Dies ergäbe

$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots,^{2})$$

1) Rhind ist der Name des Entdeckers und ursprünglichen Besitzers des Papyrus.

2) Das Zeichen $\approx$ hat die Bedeutung „näherungsweise gleich“.

also verglichen mit dem tatsächlichen Wert 3,14159265 ... eine ganz beträchtliche Genauigkeit. Diese Regel tritt in spätägyptischer Zeit wiederholt auf. Über die Entstehung dieses auffallend genauen Näherungswertes ist nichts Bestimmtes bekannt. Vermutlich ist er auf dem Weg des Versuchs gewonnen worden durch Vergleich der Höhen, bis zu denen dieselbe Wassermenge in einem zylindrischen und einem quaderförmigen Behälter steigt. Vielleicht ist der Wert $\frac{8}{9}$ auch als Mittel aus der Seite des umbeschriebenen und der Seite des einbeschriebenen Quadrats gefunden worden. Hat ersteres die Seite 1, so ist die Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrats $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707 \approx \frac{7}{9}$.

Das älteste mathematische Buch der **Chinesen**, das „heilige Buch der Rechenkunst" Chou-pei suan-ching, dessen ältester Teil auf etwa 1100 v. Chr. zurückgreift, hat in seinem zweiten Teil, dessen Entstehung zwischen 213 v. Chr.[1]) und 300 n. Chr. angesetzt wird, für π den wesentlich schlechteren Näherungswert $\pi = 3$. Im 3. Jahrhundert n. Chr. begegnen wir bei *Liu Hui* den erheblich genaueren Näherungswerten $\pi \approx \frac{22}{7}$ und $\pi \approx \frac{157}{50} = 3{,}14$.

Neuere Untersuchungen haben dargetan, daß bei den **ältesten Indern** einheimische mathematische Kenntnisse vorhanden waren. In den alten indischen Religionsbüchern, den *Sulba-Sûtras*, finden sich für den Bau von Altären sehr genaue Vorschriften. Werden diese nicht peinlich genau befolgt, so nimmt die Gottheit das dargebrachte Opfer nicht an und der Beter kann nicht auf die Erhörung seiner Bitte durch die Gottheit hoffen. Einer der Verfasser dieses Priesterhandbuchs, Baudhâyana, der vielleicht im 6. vorchristlichen Jahrhundert lebte, ist mit dem ihm überlieferten älteren Wert von $\pi \approx \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3{,}0625$ nicht zufrieden. Zur *Zirkulatur des Quadrats ABCD* (von der

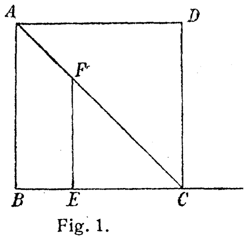

Fig. 1.

1) In diesem Jahr ließ nämlich der Kaiser Tsin she huâng ty sämtliche vorhandenen Bücher verbrennen. Seinem Nachfolger, der einem anderen Herrschergeschlecht angehörte, verdanken wir die Rettung der dem allgemeinen Flammentod entgangenen Überreste altchinesischer Wissenschaft.

Seite a und der Diagonale $a\sqrt{2}$) nimmt er (Fig. 1) den Durchmesser des flächengleichen Kreises als ein Mittel zwischen Seite und Diagonale und zwar $\frac{2}{3}\,a + \frac{1}{3}\,a\sqrt{2} = CE + AF = CE + CG = EG$; der Halbmesser des Kreises, der den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Quadrat hat, wird $r = \frac{a}{6}\left(2+\sqrt{2}\right)$. Damit kommt aus

$$\frac{a^2}{36}\left(2+\sqrt{2}\right)^2 \pi = a^2$$

$$\sqrt{\pi} \approx \frac{6}{2+\sqrt{2}} = 3\left(2-\sqrt{2}\right),$$

also $$\pi \approx 18\left(3-2\sqrt{2}\right) \approx 3{,}0883\ldots$$

Dieser Wert ist wahrscheinlich auf empirischem Weg gefunden worden; er ist das erste Beispiel eines durch *Mittelbildung hergestellten Näherungswerts.*

Eine andere Rechenvorschrift lautet: „Teile (den Durchmesser) in 15 Teile und nimm 2 weg, das (was übrigbleibt) ist ungefähr die Seite des Quadrats.“ Damit wird der Inhalt des Kreises $\left(\frac{13}{15}\cdot 2r\right)^2 = \left(\frac{26}{15}r\right)^2 = 3\frac{1}{225}r^2$. Darin liegt die Annahme $\pi \approx 3\frac{1}{225}$, ein Wert, der von $\pi \approx 3$ nicht wesentlich abweicht.

Die Kenntnis der Tatsache, daß der Kreisradius genau 6mal als Sehne in den Kreis eingetragen werden kann, so daß ein regelmäßiges Sechseck entsteht, ist **babylonischen** Ursprungs. Dies führte zu der freilich sehr ungenauen Annahme, daß der Kreisumfang das Sechsfache des Kreishalbmessers, also das Dreifache des Durchmessers sei. Auch in der **Bibel** findet sich dieser babylonische Näherungswert. So heißt es bei der Beschreibung des Salomonischen Tempelbaus (966 bis 955 v. Chr.) von dem ehernen Meer, einem kreisrunden Waschgefäß, in 1. Kön. 7, 23 und 2. Chron. 4, 2: „Und er fertigte das Meer, aus Erz gegossen, von einem Rande bis zum andern 10 Ellen weit, ringsrum rund, und eine Schnur von 30 Ellen umspannte dasselbe ringsrum.“ Eine tatsächliche Messung wird dieser Angabe kaum zu grunde liegen, denn eine solche hätte einen Umfang von annähernd 32 Ellen ergeben. Es ist wahrscheinlich, daß der Umfang von 30 Ellen wirklich aus 3×10 berechnet wurde und daß der Verfasser der Chronika sich dieser rohen Annäherung bewußt war. Auch eine Stelle im Talmud weist auf die Multiplikation mit 3 hin: „Was im Umfang drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit."

Der Wert $\pi \approx 3$ ist häufig auch heute noch in der Praxis (und nur darum handelte es sich in jenen alten Zeiten) völlig genügend.

4. DIE GRIECHEN

Von den griechischen Mathematikern hat sich nach einem Bericht von Plutarch zuerst Anaxagoras (500 bis 428 v. Chr.) mit der Kreisquadratur beschäftigt; er soll im Gefängnis, in das er 434 v. Chr. als Freund und einstiger Lehrer des großen athenischen Staatsmannes Perikles von dessen Feinden gebracht wurde, „die Quadratur des Kreises" gezeichnet haben. Genaueres ist über seine Ergebnisse nicht bekannt; doch hat sich Anaxagoras das unstreitige Verdienst erworben, zu wissenschaftlicher Bearbeitung dieses Problems angeregt zu haben.

Auf drei Wegen versuchten die Griechen die Lösung der Aufgabe zu erzwingen, den Inhalt des Kreises in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln oder die Länge des Kreisumfangs als Strecke darzustellen: entweder mit Zirkel und Lineal, oder mit mechanisch konstruierbaren Kurven oder endlich durch angenäherte Berechnung.

Auf geometrischem Wege versuchten die Lösung Antiphon (um 430 v. Chr.), Euklid (300 v. Chr., Alexandrien), Eratosthenes, Archimedes und Apollonius von Pergä (in Kleinasien, um 200 v. Chr. in Alexandrien). Der Erstgenannte zeichnete in den Kreis ein Quadrat ein, dann das Achteck, Sechzehneck usf. und fährt mit dieser Konstruktion so lange fort, bis dadurch der Kreis völlig erschöpft ist, d. h. bis das regelmäßige Vieleck von dem Kreis nicht mehr zu unterscheiden ist. Antiphon sagt nun: In den Elementen der Geometrie werde gelehrt, wie man jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln könne, also erhalte man auf diese Weise schließlich ein dem Kreis flächengleiches Quadrat. Wenn auch dieser Schluß unrichtig ist — Antiphon übersah nämlich, daß auf diese Weise nur eine angenäherte Quadratur zu erreichen ist —, so ist er doch der erste gewesen, der den später von Archimedes u. a. erfolgreich betretenen Weg vorgezeigt hat, den Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Raumes dadurch zu ermitteln, daß er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen[1]) suchte. Antiphons Zeitgenosse Bryson von Heraklää benutzte außer den einbeschriebenen auch die dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke und führte damit den *Begriff der oberen und unteren Grenze* ein. Allerdings war seine Annahme, daß die Kreisfläche das arithmetische Mittel des ein- und umbeschriebenen Quadrats sei, ein Irrtum.

Mit Archimedes (287—212 v. Chr.) tritt der erste Mathematiker auf, welcher der Aufgabe eine gründliche wissenschaftliche Bearbeitung zuteil werden ließ. Von den vier großen Männern, deren Leistungen im „klassischen Zeitalter" die Mathematik zur höchsten Blüte bei den Griechen brachten, nämlich Euklid, Eratosthenes, Archimedes und Apollonius, ist wahrscheinlich Archimedes der einzige, der sich mit der Kreisquadratur beschäftigte. Ihm verdankt man die Auffindung einer oberen und unteren Grenze für π:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Das Verdienst von Archimedes besteht darin, gezeigt zu haben, daß $3\frac{1}{7}$ kein genauer Wert, sondern nur eine obere Grenze für π ist. Obwohl der Wert $3\frac{1}{7}$ dem tatsächlichen Wert von π nicht so nahe kommt wie die untere Grenze $3\frac{10}{71}$ $\left(3\frac{1}{7} = 3{,}14285714\ldots,\quad \pi = 3{,}14159265\ldots,\quad 3\frac{10}{71} = 3{,}14084507\ldots\right)$, so wird doch der erstere Wert $3\frac{1}{7}$ seiner Einfachheit halber heute noch vielfach benützt. Nicht nur war damit die Zahl π zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, sondern der von Archimedes eingeschlagene Weg zu ihrer Auffindung wurde bis zur Erfindung der Differentialrechnung, also fast zwei Jahrtausende hindurch, von allen denjenigen begangen, die sich mit der Kreisquadratur befaßten. Den archimedischen Näherungswert $3\frac{1}{7}$ finden wir bald darauf in Alexandrien, wo er den ungenaueren ägyptischen Wert

1) Einen auf solche Überlegungen gegründeten Beweis nennt man *Exhaustionsbeweis* (exhaurire = erschöpfen).

$\left(\frac{16}{9}\right)^2$ rasch verdrängte, und von diesem Kulturmittelpunkt des griechischen Altertums aus kam der neue Wert bald nach Indien und sogar nach China. So groß war das Vertrauen zu Archimedes' Leistung, daß neu gefundene Näherungswerte von Fachmathematikern nur dann als Verbesserung anerkannt wurden, wenn sie innerhalb der archimedischen Grenzen lagen; im späten Mittelalter gingen manche Laien auf mathematischem Gebiet sogar so weit, den archimedischen Wert für genau zu halten.

In einer späteren, leider verloren gegangenen Schrift des Archimedes finden sich nach Angabe von Heron (wahrscheinlich um 110 v. Chr. in Alexandrien) zwei wesentlich genauere Näherungswerte:

$$\frac{211882}{67441} (= 3{,}1415904\ldots) < \pi < \frac{195882}{62351} (= 3{,}1416016\ldots).$$

Der erste dieser Werte stimmt bis auf 5 Dezimalen mit dem wahren Werte überein.

Die von Archimedes gefundenen Ergebnisse sind jedenfalls so bedeutend, daß sich ein näheres Eingehen auf sie empfiehlt. Archimedes beweist in seiner Abhandlung: „Die Kreismessung“ folgende drei **Sätze**:

1. Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck inhaltsgleich, wenn der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.

2. Der Kreis hat zum Quadrat seines Durchmessers nahezu ein Verhältnis wie 11 : 14.

3. Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ des Durchmessers.

Der 1. Satz wird indirekt bewiesen; der 2. Satz stützt sich auf den 3. Dieser 3. Satz ist eine der wunderbarsten mathematischen Leistungen des hervorragendsten Mathematikers des Altertums.

Wir, die glücklichen Besitzer des indischen Zahlen- und des Dezimalsystems haben wohl kaum eine Ahnung von den außerordentlichen Schwierigkeiten der Zahlenrechnung des Archimedes, bei der es sich mehrmals um das Ausziehen von Quadratwurzeln handelte, die höchst wahrscheinlich mittels Näherungsmethoden berechnet wurden. Wenn die gefundenen Ergebnisse mit dem tatsächlichen Wert nur in geringem Maße übereinstimmen, nämlich nur bis auf 1 bis 2 Tausendstel, so beweist dies geradezu die Schwierigkeit der von Archimedes behandelten Aufgabe.

Zur Berechnung von π benützt Archimedes die schon von Antiphon und Bryson angegebene **Methode**: Zur Auffindung einer unteren Grenze geht er vom regelmäßigen einbeschriebenen Sechseck (u_6) aus, geht dann zum Zwölfeck (u_{12}) usf. bis zum 96-Eck (u_{96}) über. Die Näherungswerte der hierbei auftretenden Quadratwurzeln wählt er absichtlich immer etwas zu klein, um so eine sichere untere Grenze für den Umfang u_n des einbeschriebenen n-Ecks und um so mehr für den Kreisumfang zu erhalten.

Eine obere Grenze ergibt sich auf demselben Weg, ausgehend vom umbeschriebenen regelmäßigen Sechseck (U_6) und aufsteigend bis zum umbeschriebenen regelmäßigen 96-Eck (U_{96}).

Ist $AC = r$ (Fig. 2) der Radius des Inkreises mit Mittelpunkt A, C der Berührungspunkt der Sechseckseite $S_6 = BB'$, so ist $BB' = AB = a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, woraus $r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1$. Für $\sqrt{3}$ nimmt Archimedes den etwas zu kleinen Wert $\frac{265}{153}$, so daß die Proportion entsteht

$$(1) \qquad r : \frac{a}{2} = AC : BC > 265 : 153.$$

Hieraus folgt

$$(r + a) : \frac{a}{2} = (AC + AB) : BC > (265 + 2 \cdot 153) \quad 153$$
$$> 571 : 153.$$

Halbiert man den $\sphericalangle BAC$ durch AD, so ist DC die halbe Zwölfecksseite $\left(\frac{1}{2} S_{12}\right)$, und es gilt der bekannte Satz:

$$AB : AC = BD : DC,$$

woraus sich nach dem Satz von der korrespondierenden Addition ergibt

$$(AB + AC) : AC = (BD + DC) : DC$$

oder

$$AC : DC = (AB + AC) : BC.$$

Wenn man den in (1) gefundenen Wert hierin einsetzt, gibt das

(2) $$AC : DC > 571 : 153$$

oder $$r : \tfrac{1}{2} S_{12} > 571 : 153,$$

also $$r : U_{12} > 571 : 3672.$$

Erhebt man rechts und links ins Quadrat, so kommt

$$AC^2 : DC^2 > 571^2 : 153^2,$$

woraus $$(AC^2 + DC^2) : DC^2 > 349450 : 153^2$$

oder, da $\triangle ACD$ rechtwinklig ist, also $AC^2 + DC^2 = AD^2$,

$$AD^2 : DC^2 > 349450 : 153^2$$ oder

(3) $$AD : DC > 591\tfrac{1}{8} : 153.$$

Halbiert man $\sphericalangle DAC$ durch AE, so hat man

$$AD : AC = ED : EC, \text{ also}$$

(4) $$(AD + AC) : AC = (ED + EC) : EC = DC : EC$$

oder $(AD + AC) : DC = DC : EC.$

Aus (2) und (3) folgt nun, da

$$EC = \tfrac{1}{2} S_{24}$$

$$(AD + AC) : DC > \left(571 + 591\tfrac{1}{8}\right) : 153 > 1162\tfrac{1}{8} : 153,$$

also gemäß (4)

$$AC : EC > 1162\tfrac{1}{8} : 153$$

oder $r : \tfrac{1}{2} S_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 153,$

somit $r : U_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 7344.$

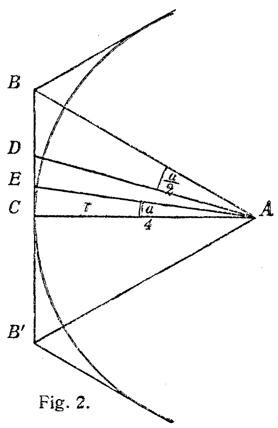

Fig. 2.

Dieses Verfahren wird nun von Archimedes mit immer etwas zu klein gewählten Wurzelwerten bis zum 96-Eck fortgesetzt. Hier findet er schließlich

$$r : \tfrac{1}{2} S_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

also $$r : U_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 29376,$$

woraus sich, da $2\pi r < U_{96}$ ist, für das gesuchte Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser um so sicherer ergibt:

$$2\pi r : 2r < 29376 : 2 \cdot 4673\tfrac{1}{2} < 14688 : 4673\tfrac{1}{2}.$$

Diese Proportion liefert eine *obere Grenze* für den gesuchten Näherungswert von π.

Zur Bestimmung der *unteren Grenze* geht Archimedes vom einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck aus. Durch Halbierung der Zentriwinkel steigt er zum 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck bis zum 96-Eck auf; er erhält schließlich für den Umfang u_{96} des einbeschriebenen 96-Ecks

$$u_{96} : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4},$$

also um so mehr $2\pi r : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4}$.

Damit ist die doppelte Begrenzung gefunden

$$14688 : 4673\tfrac{1}{2} > 2\pi r : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4}$$

oder $$3{,}1428 \cdots > \pi > 3{,}1409 \cdots$$

Durch Abrundung der unteren Grenze nach unten $\left(3\frac{10}{71}\right)$, der oberen Grenze nach oben $\left(3\frac{1}{7}\right)$ leitet Archimedes die bereits angegebene Begrenzung her $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Damit war der Wert $3\frac{1}{7}$ gefunden, der rasch seinen Siegeszug durch alle Länder antrat, in denen die Geometrie eine Heimstätte fand.

Apollonius von Pergä (um 200 n. Chr.) scheint nach den Nachrichten eines Kommentators Eutocius (etwa 550 n. Chr.) die Untersuchungen von Archimedes wieder aufgenommen und wesentlich genauere Ergebnisse erzielt zu haben. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß Apollonius den sehr genauen Näherungswert $\pi \approx 3\frac{177}{1259} = 3{,}1416$ gefunden hat. Wie so manche andere Ergebnisse griechischer Mathematik fand auch dieser Wert seinen Weg nach Indien, wo er im 5. Jahrhundert n. Chr. auftritt.

Bei Ptolemäus (zwischen 151 und 125 v. Chr.) findet sich ein Näherungswert, der dem von Apollonius sehr nahe kommt,

$\pi \approx 3\frac{17}{120}$. Teilt man den Kreisdurchmesser in 120 Teile, den Halbmesser also in 60 Teile (Sexagesimalteilung), so entsprechen den beiden archimedischen Werten in diesem ptolemäischen Sexagesimalsystem die Werte

$$3\tfrac{1}{7} = 3 + \tfrac{8}{60} + \tfrac{34,28}{3600} \quad \text{und} \quad 3\tfrac{10}{71} = 3 + \tfrac{8}{60} + \tfrac{27,04}{3600}.$$

Hieraus ergibt sich der runde Mittelwert

$$3 + \tfrac{8}{60} + \tfrac{30}{3600} = 3\,\tfrac{17}{120} = 3{,}14166\ldots.$$

Da Ptolemäus über den Grad der Annäherung keinerlei Angaben macht, so ist es kaum zweifelhaft, daß er sich der großen Genauigkeit seines Werts nicht bewußt war.

5. DIE RÖMER UND INDER DES MITTELALTERS

Dem entschlossenen, tatkräftigen Volke der *Römer*, das für praktische Interessen viel mehr Sinn hatte als für mathematische Spekulationen, genügten die vorhandenen Näherungswerte für die Bedürfnisse der messenden Geometrie vollständig. In den 10 Büchern des genialen Baumeisters Vitruvius (um 14 n. Chr.) „De Architectura“ wird der Umfang eines Rades mit 4 Fuß Durchmesser auf $12\frac{1}{2}$ Fuß angegeben, was dem ziemlich schlechten Näherungswert $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ entspricht.

Wesentlich bessere Ergebnisse finden wir bei den *Indern*. Wahrscheinlich werden die Inder, deren Stärke in der rechnenden Geometrie lag — schon ihr wunderbar gefügtes Zahlensystem weist darauf hin —, manche ihrer gerade auf unserem Gebiet gefundenen Ergebnisse griechischen Überlieferungen verdanken, was aber nicht ausschließt, daß sie auch selbständig rechnerische Probleme wie die Kreisquadratur bearbeiteten. In der Hauptsache sind die indischen mathematischen Schriftsteller Astronomen und Astrologen; die mathematischen Vorkenntnisse, deren sie bedurften, entwickelten sie meist in den einleitenden Abschnitten ihrer Schriften oder in gelegentlichen Abschweifungen. Dies ist wenigstens bei den drei mathematischen Astronomen der Fall, die unsere Aufmerksamkeit verdienen, Aryabhatta (geb. 476), Brahmagupta (geb. 598) und Bhaskara (geb. 1114). Aryabhatta berechnete seinen Näherungswert

$$\pi \approx 3{,}1416 = \frac{31\,416}{10\,000}$$

aus dem einbeschriebenen 384-Eck ($= 6 \cdot 64$-Eck) nach der gegenüber der archimedischen Rechnungsweise wesentlich bequemeren Formel

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

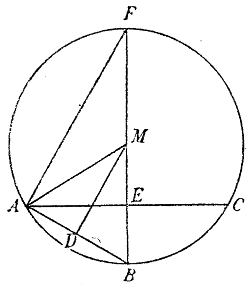

Fig. 3.

Ist in Fig. 3 $AB = s_{2n}$, $AC = s_n$ und $MD = \rho_{2n}$, so folgt

$$\triangle ABE \sim \triangle MBD,$$

also, wenn $MA = r$ ist,

$$s_{2n} : r = \tfrac{1}{2} s_n : \rho_{2n},$$

(1) woraus $2 s_{2n} \rho_{2n} = r s_n$.

Aus dem rechtwinkligen $\triangle ADM$ folgt

$$\rho_{2n}^2 = r^2 - \tfrac{1}{4} s_{2n}^2, \quad \text{also} \quad 2\rho_{2n} = \sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}.$$

Setzt man diesen Wert für ρ_{2n} in (1) ein, so kommt nach einfacher Umformung

$$s_{2n}^4 - 4r^2 s_{2n}^2 + r^2 s_n^2 = 0,$$

woraus $$s_{2n}^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Setzt man hierin $r = 1$, so erhält man endlich

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

Die Seite des einem Kreis mit Radius 1 einbeschriebenen Quadrats ist bekanntlich $s_4 = \sqrt{2}$.
Damit kommt aus der obigen Formel für die Seite des einbeschriebenen 8-Ecks $s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
Fährt man in der Berechnung so fort, so erhält man

$$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

$$s_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \ldots$$

also wird:

$$u_{16} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,; \quad u_{32} = 32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,;$$

$$u_{64} = 64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$$

Aryabhatta erhält so aus u_{384} das Verhältnis

$$\pi \approx \frac{3927}{1250} = \frac{31\,416}{10\,000} = 3{,}1416.$$

Denselben Wert finden wir auch bei Bhaskara, welcher diesen Wert den „genauen“ nennt im Gegensatz zu dem „ungenauen“ $\frac{22}{7}$. In Bhaskaras Werk Siddhânta-Siromâni (die Krönung des Systems) finden wir in dem die Arithmetik behandelnden Abschnitt Lilavati (die Reizende) auch den ptolemäischen Wert $\frac{377}{120}$.

Bei Brahmagupta, der als Arithmetiker entfernt nicht an Bhaskara heranreicht, stoßen wir auf den echt indischen Wert $\pi \approx \sqrt{10}$. Wird der Kreisdurchmesser gleich 1 gesetzt, so findet man der Reihe nach aus den oben angegebenen Wurzelausdrücken

$$u_{12} = \sqrt{9{,}65}, \quad u_{24} = \sqrt{9{,}81}, \quad u_{48} = \sqrt{9{,}86}, \quad u_{96} = \sqrt{9{,}87},$$

so daß die Vermutung naheliegt $\pi = u_\infty \approx \sqrt{10}$.

6. DIE ARABER

Im siebenten Jahrhundert tritt ein neues Volk in den Kreis der Kulturvölker, die Araber. Sie sind es vor allem gewesen, die uns durch ihre Übersetzungen die Schätze der griechischen und indischen Geistestätigkeit überliefert haben. Das Herrschergeschlecht der Abbasiden, das von der Mitte des 7. bis zu der des 8. Jahrhunderts in Damaskus residierte und dessen bekanntestes Glied Karls des Großen Zeitgenosse Harun Al Raschid ist, hatte sich die Pflege der Wissenschaft zur vornehmsten Aufgabe gemacht. Mit allen Mitteln erwarb man griechische (und indische) Manuskripte, die von Fachgelehrten übersetzt und zugleich erläutert wurden. Auch die Abhandlung des Archimedes über die Kreismessung war bis zum Beginn des 10. Jahrhunderts ins Arabische übertragen. Allerdings stammten diese gelehrten Übersetzer nicht durchweg aus Arabien; vielfach waren es Angehörige anderer Völkerstämme, wie Syrer, Mesopotamier, Perser, Nordafrikaner und Spanier, später auch Türken und Inder, die alle das Band der gemeinsamen Religion, einer einheitlichen sozialen Kultur und vor allem das der arabischen Sprache umfaßte. Neben dieser Übersetzertätigkeit tritt uns auch eigene Forschung entgegen, freilich auf Grund der von den Griechen geholten Kenntnisse. Als die bedeutendsten arabischen Mathematiker sind zu nennen Mohammed ibn Musa mit dem Beinamen: Alchwarizmi, (ibn = Sohn), der im 1. Viertel des 9. Jahrhunderts lebte, Abul Wafa (940–998) und Ibn Alhaitam (958–1038). Dem letzteren verdanken wir eine selbständige Behandlung unseres Problems. Obwohl sich die Araber auf geometrischem Gebiet nicht besonders schöpferisch auszeichneten, so wollen wir doch von der arabischen Mathematik, diesem glanzvollen Gestirn am Himmel der Wissenschaft, nicht scheiden, ohne noch hervorzuheben, daß durch arabische Mathematiker die Algebra und die Trigonometrie auf eine wesentlich höhere Stufe gehoben wurden.

7. DIE VÖLKER DES ABENDLANDES BIS 1400

In der Geschichte der Quadratur des Kreises finden wir einen Fortschritt erst im 13. Jahrhundert, wo sich im christlichen Abendland allmählich ein regeres Geistesleben zu entfalten begann. Wenn man bedenkt, daß die Gelehrtensprache des früheren Mittelalters das Lateinische war und wenn man sich daran erinnert, wie gering die Leistungen der Römer auf dem Gebiet der Mathematik waren, so erscheint diese lange unfruchtbare Zeit nicht befremdlich. Erst als die Gelehrten anfingen, auf dem Umweg über arabische Schriften die griechischen Klassiker ins Latein zu übersetzen, befaßte man sich auch im Abendlande wieder mit mathematischen Studien.

Mit Leonardo von Pisa (um 1220) tritt für kurze Zeit ein führender Geist in der Geschichte der Geometrie wieder auf. Im Jahr 1220 schrieb er in seiner Vaterstadt Pisa ein

Buch über „praktische Geometrie“, worin sich eine Rektifikation des Kreises mittels ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke findet. Indem Leonardo bis zum 96-Eck ging, fand er die Grenzwerte $\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3{,}1427\ldots$ und $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}1410\ldots$, woraus er den Mittelwert ableitete:

$$\pi \approx \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418\ldots.$$

In der nun folgenden Zeit ist die Behandlung unseres Problems auf ihrem Tiefstand angelangt; vielfach wird der archimedische Näherungswert $\pi = 3\frac{1}{7}$ als der genaue Wert angesehen. Wir begnügen uns, wenigstens eine der zahlreichen Schriften zu erwähnen, in denen in echt mittelalterlich scholastischer Weise die Quadratur des Kreises behandelt wird. Albert von Sachsen, gest. 1394, der als erster mathematischer Universitätslehrer deutscher Abstammung zu nennen ist, untersucht in seiner Abhandlung über die Kreisquadratur zuerst die Frage, ob überhaupt ein flächengleiches Quadrat vorhanden sei. Mit spitzfindiger Logik legt er alle ihm bekannten Gründe und Einwände dar. Hierauf setzt er dem Leser ausführlich auseinander, was man unter der Quadratur des Kreises verstehen könne und was man darunter verstehen müsse. Eine Berechnung von π liefert er aber nicht, sondern sagt kurzweg, daß das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser wie 22 : 7 sei; hierfür sei zwar, nach der Aussage vieler Philosophen, ein Beweis vorhanden, doch sei dieser sehr schwierig.

8. VON CUSANUS BIS HUYGENS

Zwei Jahrhunderte müssen wir weiterschreiten, um eine wirkliche Förderung unseres Problems verzeichnen zu können. Um die Mitte des 15. Jahrhunderts beginnt die Reformbewegung des Humanismus, die den Geist des Altertums wieder neu aufleben ließ und mit die Ursache war, daß die Schriften der griechischen Mathematiker im Original studiert wurden.

Georg von Peurbach (1423–1461, Wien) war sich dessen genau bewußt, daß die überlieferten Werte von π, sowohl die des Archimedes und Ptolemäus als auch die der indischen Mathematiker, nur angenähert richtig sind. Besondere Hervorhebung verdient der Umstand, daß Peurbach darüber nicht im Zweifel war, daß sich dieses von uns jetzt durch π bezeichnete Verhältnis überhaupt nicht genau angeben lasse. Der deutsche Kardinal Nikolaus Cusanus (1401–1461) hat das Verdienst, bei der Behandlung der Kreisquadratur neue Bahnen begangen zu haben. Er definiert die Kreislinie als Vieleck mit unendlich vielen Seiten und versucht die Umwandlung eines regelmäßigen Vielecks in einen Kreis (Arkufikation der Geraden). Ausgehend vom regelmäßigen Dreieck, sucht er ein regelmäßiges Vieleck von immer größerer Seitenzahl, das denselben Umfang wie das Dreieck hat. Indem er zu Vielecken mit immer wachsender Seitenzahl übergeht, kommt er schließlich zum Kreis, dessen Radius zu bestimmen ist, da ja der Kreisumfang bekannt ist. Cusanus fand so auf umständlichem und nicht leicht zu verfolgendem Wege $\pi \approx \frac{144}{5\sqrt{84}} = 3{,}142337\ldots$, ein Wert, der etwas genauer ist als $3\frac{1}{7}$. Er stellte noch eine ganze Reihe von Konstruktionen auf, die aber sämtlich die Genauigkeit des eben angegebenen Werts nicht erreichen.

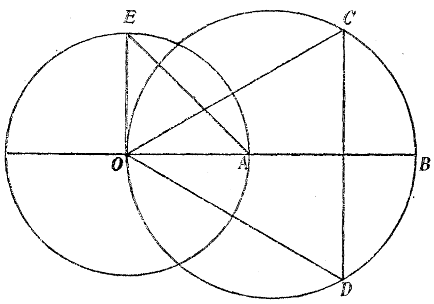

Fig. 4.

Eine dieser Cusanischen **Konstruktionen** lautet (Fig. 4): Verlängere den Radius $OA = r$ des gegebenen Kreises um die Seite des einbeschriebenen Quadrates AE bis B; beschreibe über OB als Durchmesser einen Kreis, so ist der Umfang des diesem zweiten Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks $\approx 2\pi r$.

Es ist $$AB = AE = r\sqrt{2},$$
also $$OB = r + r\sqrt{2} = r\,(1 + \sqrt{2}) \equiv 2\rho.$$
Da aber im Kreis mit Radius ρ die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks $\rho\sqrt{3}$ ist, so folgt daraus

$$OC = OD = DC = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2}),$$

also ist $\qquad 3OC \approx 2\pi r \approx 3\rho\sqrt{3} = \frac{3}{2} r\sqrt{3}(1 + \sqrt{2}),$

also (mit $r = 1$)

$$\pi \approx \frac{3}{4}\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$$
$$= \frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 3{,}1361\ldots$$

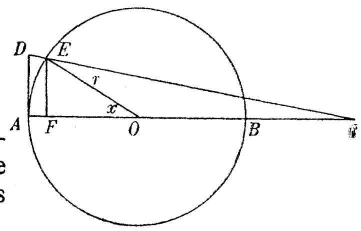

Fig. 5.

Ist x der Zentriwinkel eines Kreisbogens AE (Fig. 5), also rx die Länge des Bogens AE, so ist nach Cusanus

$$AE = rx \approx \frac{3r\sin x}{2 + \cos x}.^{1)}$$

Damit erhalten wir die älteste **Näherungskonstruktion für die Rektifikation eines beliebigen Kreisbogens:**

AE sei der zu rektifizierende Bogen. Verlängert man den Durchmesser AB um $BC = r$, zieht $DA \perp AB$ und CE, so ist $AD \approx$ Bogen AE.

---

1) Entwickelt man die Funktion $\frac{3r\sin x}{2 + \cos x}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe mit Benutzung der auf S. 35 angegebenen Reihen für $\sin x$ und $\cos x$, so findet man aus

$$\frac{3r\sin x}{2 + \cos x} = r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)$$

$$3r\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$
$$= r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\left(2 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right).$$

Durch Ausmultiplizieren des Produktes der rechten Seite und Vergleichung der Glieder gleich hoher Potenzen der linken und rechten Seite findet man die Werte für die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$; es ergibt sich so die Reihe

$$AE = r\left(x - \frac{x^5}{180} - \frac{x^7}{1512} - \cdots\right).$$

Man sieht hieraus, daß der Fehler unserer Konstruktion um so kleiner wird, je kleiner x ist; für $x = 16^0$ beträgt der Fehler etwa $\frac{1}{4}''$, für $x = 36^0$ erst ungefähr $2'$.

Aus der Proportion $AD : EF = CA : CF$ folgt mit $EF = r \sin x$, $CF = CO + OF = 2r + r \cos x$, $CA = 3r$:

$$AD = \frac{3r \sin x}{2 + \cos x}.$$

Nun ist aber $AE = rx$ und damit ist die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen. Natürlich läßt sich die Formel auch zur Berechnung von π verwenden. Setzt man $x = 30^\circ$, so erhält

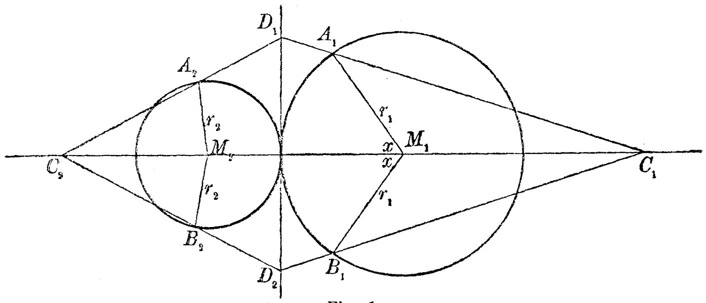

Fig. 6.

man für den Bogen $AE = \frac{\pi r}{6}$ mit $r = 1$

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{3 \sin 30^\circ}{2 + \cos 30^\circ} = \frac{3}{4 + \sqrt{3}} = 0{,}52337 \ldots \text{ (statt } 0{,}52359 \ldots).$$

Für $x = 60^\circ$ erhält man $\frac{\pi}{3} \approx \frac{3}{5}\sqrt{3} = 1{,}03926 \ldots$ (statt 1,04719 ...), also liefert die Konstruktion einen Fehler von etwa $^4/_5\,\%$. Da man den Winkel x auch unten ansetzen kann (s. Fig. 6), so ist das Verfahren noch für Bogen bis zu $^1/_3$ des Kreisumfangs anwendbar. Außerdem kann, wie die Fig. 6 zeigt, mittels dieser Methode ein Kreisbogen $A_1 B_1$ im Kreis vom Halbmesser r_1 auf den Kreis mit Halbmesser r_2 übertragen werden, so daß Bogen $A_2 B_2 \approx$ Bogen $A_1 B_1$ wird.

Eigenartig ist die Methode, wie Leonardo da Vinci (1452 bis 1519), eines der größten Universalgenies, welche je gelebt haben, die Quadratur des Kreises löste. Ihm, dem Erfinder vieler maschineller Konstruktionen, lag es nahe, das Problem mechanisch zu lösen. Läßt man einen Kreiszylinder, dessen Höhe gleich dem halben Radius seines Querschnitts ist, einmal ganz abrollen, so ist seine Spur, d. h. die von ihm während des Rollens bedeckte Fläche gleich der Fläche des Querschnittkreises.

Im 16. Jahrhundert wird durch immer genauere Rechnungen die Zahl der richtigen Stellen der Näherungswerte fortwährend größer, die tatsächliche Annäherung an den wahren Wert immer schärfer. Wenn auch manche Quadratoren von der Unrichtigkeit ihrer genauen Quadratur nicht zu überzeugen waren, so gab doch mehrfach eine verfehlte Quadratur Veranlassung zu mathematischen Streitschriften, in denen der Fehler einer solchen „genauen" Quadratur nur dadurch nachgewiesen werden konnte, daß der Wert von π auf eine noch größere Zahl von richtigen Dezimalen angegeben wurde. Gelegentlich griffen in einen solchen Streit auch hervorragende Mathematiker ein, wie die beiden Holländer Willibrord Snellius (1580–1626) und Christian Huygens (1629–1695), wodurch das Problem eine wissenschaftliche Förderung erfuhr.

Im allgemeinen wurde das archimedische Verfahren benützt, um π mit immer größerer Genauigkeit zu berechnen. Hier ist besonders der Franzose Vieta (1540–1603) zu nennen. In einer 1593 erschienenen Abhandlung gibt er einerseits durch Fortsetzung des archimedischen Verfahrens vom 6-Eck bis zum um- und einbeschriebenen $2^{16} \cdot 6$-Eck (393216)-Eck den Wert für π auf 9 Dezimalen genau an: er stellt die Ungleichung auf

$$3{,}1415926535 \cdots < \pi < 3{,}1415926537 \ldots,$$

deren beide Werte 9 übereinstimmende Dezimalen haben. Andererseits beschreitet er den von Antiphon (S. 13) und Aryabhatta (S. 20f.) angegebenen Weg.

Sind ρ_n und ρ_{2n} die Inkreisradien, i_n und i_{2n} die Inhalte des einem Kreis vom Radius $r = 1$ einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und $2n$-Ecks, so ist, wie der Leser mit Hilfe der auf S. 20 angegebenen Formeln nachrechnen kann:

$$i_{2n} = \frac{1}{\rho_n} i_n, \text{ also } \frac{i_n}{i_{2n}} = \rho_n;$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4} s_n^2}; \quad \rho_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\rho_n}.$$

Nun ist für das dem Kreis einbeschriebene Quadrat

$$i_4 = 2 \text{ und } \rho_4 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Durch Anwendung der Formel

$$\rho_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\rho_n} \quad \text{erhält man} \quad \rho_4 = \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

$$\rho_8 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}; \quad \rho_{16} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}; \ldots.$$

Der Inhalt des Kreises mit dem Radius 1 ist dargestellt durch π; es gilt daher, wie leicht einzusehen, mit wachsendem n das (unendliche) Produkt

$$(1) \qquad \frac{i_4}{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{i_4}{i_8} \cdot \frac{i_8}{i_{16}} \cdot \frac{i_{16}}{i_{32}} \cdots \frac{i_{\frac{n}{4}}}{i_{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{i_{\frac{n}{2}}}{i_n}.$$

Gemäß der Bedingung $\frac{i_n}{i_{2n}} = \rho_n$ nimmt die Gleichung (1) die Form an $\frac{i_4}{\pi} = \rho_4 \cdot \rho_8 \cdot \rho_{16} \ldots$, woraus sich mit Benutzung der oben gefundenen Werte unter Berücksichtigung, daß $i_4 = 2$ ist, das *unendliche Produkt* ergibt

$$(2) \quad \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots.$$

Damit war die erste genaue analytische Darstellung von π und zugleich das erste unendliche Produkt gefunden. Um die Konvergenz dieses Produktes hat sich Vieta nicht bemüht; sie ist erst in neuester Zeit (1891) von Rudio streng bewiesen worden.

Der Ausdruck (2) läßt sich durch Benutzung goniometrischer Formeln noch in anderer Form schreiben. Es ist nämlich

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \cos 45^0 = \cos \tfrac{90^0}{2};$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \cos \tfrac{45^0}{2} = \cos \tfrac{90^0}{4};$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} = \cos \tfrac{90^0}{8}, \ldots.$$

Damit nimmt der Ausdruck (2) die Form an

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^0}{2} \cdot \cos\frac{90^0}{4} \cdot \cos\frac{90^0}{8} \cdots.$$

Dieses weitere unendliche Produkt ist ein besonderer Fall einer zuerst von Euler aufgestellten Formel (vgl. S. 45).

Vieta hat außerdem noch eine recht genaue **Näherungskonstruktion** für π angegeben. Aus der Annahme

$$\pi \approx 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}1416407\ldots$$

ergibt sich der Kreisumfang als Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{5}$ des Durchmessers sind.

Eine geradezu bewundernswerte Ausdauer und Rechengeschicklichkeit entwickelte Ludolf van Ceulen (1539–1610). Um die Zahl π auf 20 Dezimalen zu erhalten, dringt er nach dem Verfahren von Aryabhatta bis zum $15 \cdot 2^{31}$-Eck vor; schreibt aber in der Schrift: Van den Circkel (Delft 1596): „Wer Lust hat, mag näher kommen (d. h. noch mehr Stellen berechnen)". Später erhöhte er die Zahl der genauen Stellen auf 32 (aus dem 2^{62}-Eck), dann auf 35 mittels der Formel $s_{2n} = \sqrt{2(1 - \rho_n)}$. Daß Ludolf auf seine mathematische Leistung nicht wenig stolz war, beweist die Tatsache, daß er in seinem Testament bestimmte, die 35 Dezimalstellen sollten auf seinem Grabstein eingeschrieben werden.

Den uns bis jetzt bekannten rationalen Näherungswerten $3\frac{1}{7}$, $3\frac{10}{71}$ (Archimedes); 3,1416 (Ptolemäus und Inder) reiht sich ein weiterer an

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929\cdots.$$

Dieser wurde bisher dem Adriaen Anthonisz (1527–1607, in latinisierter Form Adrian Metius) zugeschrieben.[1]) Nach einem Bericht seines Sohnes Adrian (1571–1635, Mathematiker) soll sein Vater diesen Wert dadurch gefunden haben, daß er in einer Streitschrift gegen Duchesne die Grenzen aufstellte

$$3\,\frac{15}{106} < \pi < 3\,\frac{17}{120} \text{ oder } \frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}.$$

Durch Mittelbildung aus den beiden Zählern 333 und 377 und den beiden Nennern 106 und 120 entstand der neue

1) Der Näherungswert $\pi \approx \frac{355}{113}$ findet sich schon im 5. Jahrhundert neben dem archimedischen $\frac{22}{7}$ bei dem Chinesen Tsu-Chungchih und wird von ihm der „genaue Wert" genannt gegenüber dem „ungenauen Wert" $\frac{22}{7}$.

Wert $\frac{710}{226}$ oder $\frac{355}{113}$, der trotz seiner kleinen Zahlen auf 6 Dezimalen genau ist. Neueren Forschungen zufolge soll aber ein deutscher Mathematiker Valentius Otho (1550–1605) schon vor Metius diesen Wert berechnet haben. Er läßt sich in der Form schreiben

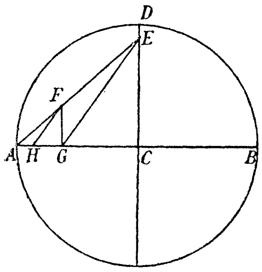

Fig. 7.

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2},$$

wonach er leicht zu **konstruieren** ist.[1]) Ist $CD = 1$ (Fig. 7) und $CE = \frac{7}{8}$, $AF = \frac{1}{2}$, $FG \parallel CD$ und $FH \parallel EG$, dann ist

$$AH : AG = AF : AE$$

$$\text{oder } AH = AG \cdot \frac{AF}{AE}$$

und $\quad AG : AC = AF : AE$ oder $AG = AC \cdot \frac{AF}{AE}$.

Damit wird, da $AC = 1$ ist, $\quad AH = \frac{AF^2}{AE^2}$.

Nun ist $\quad AE^2 = 1 + \frac{7^2}{8^2} = \frac{8^2+7^2}{8^2}$,

somit $\quad AH = \frac{8^2}{4(7^2+8^2)} = \frac{4^2}{7^2+8^2}$.

Der Kreisumfang ist also $2\pi r \approx 3 \cdot AB + 2 \cdot AH$.

Wir merken zu dieser und der vorhergehenden Vietaschen Näherungskonstruktion noch an, daß beide praktisch wegen der Teilung von Strecken in 5 und 8 Teile nicht empfehlenswert sind.

Eine weitere **Näherungskonstruktion** *zur Rektifikation von Kreisbögen* hat Snellius aufgestellt. Zieht man zur Geraden CD der Fig. 5 durch O die Parallele JOK (Fig. 8) und ist $GHK \perp AC$, so kann $\triangle\, GOC$ annähernd als gleichschenklig vorausgesetzt werden, da die Punkte H und B bei kleinem x sehr nahe beieinander liegen. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$\sphericalangle\, GOH = \sphericalangle\, GCO = \varphi, \quad \text{also} \quad \sphericalangle\, OGE = \sphericalangle\, OEG = 2\varphi,$$

1) Diese Näherungskonstruktion stammt von dem holländischen Mathematikprofessor Jakob de Gelder (1765–1848, Leyden).

somit $\sphericalangle EOA = 4\varphi - \varphi = 3\varphi$.[1]) Nun ist

$$AJ = r \tan\varphi,\ DJ = GK = 2GH = 2 \cdot r \cdot \sin\varphi.$$

Damit wird $AD = AJ + DJ = r(\tan\varphi + 2\sin\varphi)$, oder, da

$$\varphi = \frac{x}{3}, \quad AD = \approx r x \approx r \cdot \frac{2\sin x + \tan x}{3}.$$

Wendet man diese Formel und die von Cusanus aufgestellte Formel

$$r x \approx r \cdot \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

zur Berechnung von π an, so erhält man aus dem Sechseck ($x = 30^0$) die Grenzen $3{,}14160 \cdots$ und $3{,}14023 \cdots$, aus dem 96-Eck[2]) dagegen schon die auf 6 Dezimalen genaue Begrenzung $3{,}14159283 \cdots < \pi < 3{,}14159262 \cdots$; das 2^{30}-Eck liefert Snellius bereits 34 richtige Stellen. Um den großen Rechenvorteil ermessen zu können, der sich durch die Anwendung der Formeln von Snellius und Cusanus gegenüber dem archimedischen Verfahren ergibt, bemerken wir, daß das letztere Verfahren beim Sechseck die Grenzen 3 und 3,46 ..., beim 96-Eck erst 3,1428 ... und 3,14112 ... liefert; aus dem 2^{30}-Eck bekam Ludolf van Ceulen nur 14 Dezimalen.

Im Jahre 1654 erschien Christian Huygens' Schrift „De circuli magnitudine inventa", in welcher Huygens nicht nur die Formeln von Cusanus und Snellius beweist, sondern auch zeigt, wie man durch lineare Kombination der archi-

1) Damit ist zugleich die *Dreiteilung (Trisektion) des Winkels* OEA geliefert; für kleine x wird der Trisektionspunkt C dadurch gefunden, das OB um sich selbst verlängert wird.

2) Im 96-Eck ist der Zentriwinkel einer Vielecksseite $2\varphi = \frac{360^0}{96} = \frac{15^0}{4}$, also $\varphi = \frac{15^0}{8}$; $\sin\frac{15^0}{8}$ und $\cos\frac{15^0}{8}$ werden aus $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ durch wiederholte Anwendung der Formeln $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$ und $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$ gewonnen

$$\sin\frac{15^0}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$\cos\frac{15^0}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

medischen Vieleckszahlen die Zahl π in viel engere Grenzen einschließen kann, als dies Archimedes möglich war.

Für die Formel von Snellius findet er

$$rx < \tfrac{2}{3} r \sin x + \tfrac{1}{3} r \tan x.$$

Nun ist aber (s. Fig. 8), wenn $2x$ der Arkus des Mittelpunktwinkels $\frac{360^\circ}{n}$ ist, d. h. $AE = s_{2n}$, $AL = \frac{1}{2} S_n$, $EM = \frac{1}{2} s_n$ und $3\varphi = x$ ist,

$$r \sin x = \tfrac{1}{2} s_n, \quad r \tan x = \tfrac{1}{2} S_n.$$

Summiert man über den ganzen Kreis, so erhält man

$$2\pi r < \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \Sigma s_n + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \Sigma S_n$$

oder

$$2\pi r < \tfrac{2}{3} u_n + \tfrac{1}{3} U_n.$$

Natürlich gilt die Formel auch für jeden beliebigen Bogen b des ganzen Kreises; es ist

$$(1) \qquad b < \tfrac{2}{3} u_n + \tfrac{1}{3} U_n,$$

wobei dann u_n und U_n die Umfänge des dem Bogen b ein- und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind.

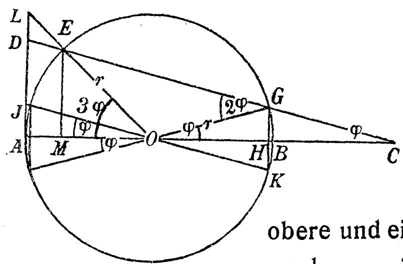

Fig. 8.

Huygens beweist nun außerdem noch folgenden Satz:

$$(2) \qquad b > \tfrac{4}{3} u_{2n} - \tfrac{1}{3} u_n$$

und hat damit für jeden Kreisbogen und damit auch für den Kreisumfang eine obere und eine untere Grenze gefunden:

$$(3) \quad \tfrac{1}{2} U_{2n} + \tfrac{2}{3} u_{2n} > 2\pi r > \tfrac{4}{3} u_{2n} - \tfrac{1}{3} u_n.$$

Diese Formel liefert für $n = 6$ die Grenzen

$$3{,}1411 \cdots < \pi < 3{,}1423 \cdots,$$

für $n = 30$ erhält man hieraus

$$3{,}1415917 \cdots < \pi < 3{,}141594 \cdots,$$

während Archimedes erst mit dem 96-Eck die zuerst angeführte Begrenzung auf 2 richtige Stellen erhielt. Die Formel (3) liefert also mit relativ einfachen Mitteln ziemlich genaue Werte für π, und die Arbeit von Huygens stellt den größten Fortschritt, namentlich nach der praktisch-rechnerischen Seite dar, den das Problem seit Archimedes erreicht hat. Leider fehlt es uns an Raum, auf die Arbeit von Huygens so einzugehen, wie sie es verdient.

Wir wollen jedoch nicht unterlassen, ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß jede der beiden Formeln (1) und (2) **Näherungskonstruktionen** liefert. Setzt man z. B. in Formel (2) $2n = 12$, so ist *der Kreisumfang sehr nahe gleich dem 16-fachen der Seite des dem Kreis einbeschriebenen Zwölfecks, vermindert um die doppelte Sechsecksseite*:

$$2\pi r > 16 s_{12} - 2 s_6.$$

Aus Formel (1) folgt aber mit $n = 12$:

$$2\pi r < 4 S_{12} + 8 s_{12} < 4 (S_{12} + 2 s_{12}):$$

Der Kreisumfang ist sehr nahe gleich der 4fachen Seite des umbeschriebenen Zwölfsecks, vermehrt um die 8fache Seite des einbeschriebenen Zwölfsecks. Wegen der mehrfachen Streckenaddierungen sind jedoch diese Näherungskonstruktionen praktisch nicht zu empfehlen.

Mit den Arbeiten von Snellius und besonders von Huygens erreicht die geometrisch-rechnerische Behandlung des Problems der Kreismessung ihren Höhepunkt, zugleich aber auch ihren Abschluß. Auf dem Weg, den die griechischen Mathematiker Bryson, Antiphon und Archimedes eingeschlagen haben, schritten zwei Jahrtausende hindurch die Mathematiker fort und erzielten dabei immer glänzendere Ergebnisse. Das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser ist schon im 17. Jahrhundert mit einer Genauigkeit ermittelt, die alle Ansprüche befriedigen muß. Manche der Männer, denen wir im Lauf unserer Betrachtungen begegnet sind, waren von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises überzeugt; sie waren jedoch nicht imstande, dies beweisen zu können. Erst im 19. Jahrhundert war, wie wir sehen werden, die mathematische Wissenschaft auf einer solchen Höhe angelangt, daß dieser Beweis geliefert werden konnte.

III. DER INFINITESIMALE ZEITRAUM

9. DER EINFLUSS DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

In dem nun folgenden Zeitraum der Geschichte der Kreisquadratur sind die Bestrebungen der Mathematiker darauf gerichtet, analytische Ausdrücke zu gewinnen, welche durch eine unendliche Reihe von Operationen gebildet werden und die in geschlossener Form den Wert des Bogens als Funktion des Radius und des Zentriwinkels angeben. Die von Cusanus und Snellius unternommenen Versuche dieser Art haben wir bereits erwähnt. Die Ableitung von Ausdrücken für beliebig große Bögen war erst ermöglicht, seit Newton (1643–1727) und Leibniz (1646–1716) unabhängig voneinander die *Infinitesimalrechnung* schufen auf Grund der Vorarbeiten von Gregorius von St. Vincentius (1584 bis 1667), Kepler (1571–1630), Cavalieri (1591–1647), Fermat (1601–1663), Tacquet (1612–1660) und von John Wallis (1616–1703).

Die bereits erwähnte *analytische Darstellung von* π *ist nur möglich durch unendliche Reihen oder durch unendliche Produkte*, die ja (durch Logarithmierung) in unendliche Reihen umgewandelt werden können.

Das von Vieta aufgefundene unendliche Produkt

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

ist, wie wir bereits gesehen haben, die erste genaue analytische Darstellung für π.

Auf ein weiteres unendliches Produkt für denselben Wert $\frac{2}{\pi}$ ist Wallis bei Integrationsbetrachtungen gestoßen; er fand 1659 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$

Dieser Ausdruck hat gegenüber dem von Vieta aufgestellten den Vorzug, daß er zu seiner Ausmittlung nur rationale Operationen verlangt. Zur Berechnung von π ist jedoch dieser Ausdruck nicht geeignet. Wallis hat außerdem vermutet, daß eine genaue Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal unmöglich sei, und diesen Gedanken auch ausgesprochen, ja sogar bemerkt, daß $\frac{\pi}{2}$ nicht durch Wurzeln darstellbar sei, wenn er es auch nicht beweisen konnte. Ferner hat Wallis einen Beweis für die Konvergenz seines Ausdrucks geliefert, was Vieta, wie wir wissen, versäumte.

Lord Brouncker (1620—1684) brachte das von seinem Freunde Wallis ihm mitgeteilte unendliche Produkt auf nicht mehr bekannte Weise in die Form eines *unendlichen Kettenbruchs*

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Newton hatte sich seit 1666 mit Untersuchungen über *unendliche Reihen* beschäftigt. Er fand die *Sinusreihe*[1])

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-\infty < x < \infty),$$

die *Cosinusreihe*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-\infty < x < \infty),$$

sowie die *arcsin-Reihe*[2])

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$(-1 \leqq x \leqq 1).$$

1) Hier und in den folgenden Reihen ist der Winkel x stets in analytischem Maß oder Bogenmaß gegeben, wie dies in der höheren Mathematik allgemein üblich ist. x ist der Bogen, der im Kreis vom Halbmesser 1 dem Zentriwinkel α entspricht, so daß stets die Proportion gilt $\alpha^0 : 360^0 = x : 2\pi$, also

$$\alpha^0 = \frac{x \cdot 360^0}{2\pi} = x \cdot \frac{180^0}{\pi}. \qquad \left(\frac{180^0}{\pi} = 57{,}3^0 = 3437{,}7' = 206265''\right).$$

Es ist also z. B.

$$\sin 2\pi = \sin 360^0, \quad \sin \pi = \sin 180^0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^0, \quad \text{usw.}$$

2) $\arcsin x$ bedeutet den Bogen (arcus) im Kreis vom Radius 1, dessen Sinus gleich x ist; also z. B. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; ebenso folgt aus $\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^0 = 1$ durch Umkehrung $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Bei diesen sämtlichen Reihen fügte er Regeln für die Bildung der Koeffizienten beliebig hoher Ordnung bei und gab auch die Konvergenzbedingungen an, d. h. die Grenzen, innerhalb deren x sich bewegen darf, damit die Reihe einen endlichen Grenzwert erhält.

Mit Benützung dieser Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$ stellte Newton eine neue *Näherungsformel*[1]) auf:

$$\frac{x}{\sin x} \approx \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}.$$

Aus $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + \cdots$

folgt mit Vernachlässigung aller Potenzen von x, die von höherem als dem 5. Grade sind:

$$\sin x \cos x \approx x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 \cdot \qquad 1$$

Ebenso ist $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad a$$

und $$\cos x \approx 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} \cdot \qquad bx$$

Um hieraus x^2, x^3, x^4 und x^5 zu eliminieren, multiplizieren wir die drei Gleichungen mit den Größen 1, a, bx und erhalten durch Addition

$$\sin x \cos x + a \sin x + bx \cos x$$

$$\approx x(1 + a + b) - \frac{x^3}{6}(4 + a + 3b) + \frac{x^5}{120}(16 + a + 5b).$$

Wir setzen nun $4 + a + 3b = 0$ und $16 + a + 5b = 0$ und erhalten hieraus $a = 14$, $b = -6$,

womit sich als gesuchte Näherungsformel ergibt

$$\sin x \cos x + 14 \sin x - 6x \cos x \approx 9x$$

oder $$\frac{x}{\sin x} \approx \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}.$$

Auch diese Formel kann zur Berechnung von π verwendet werden; sie ergibt für $x = 45^0$ einen Fehler von höch-

1) Durch Vernachlässigung der Glieder von höherem als dem 3. Grad erhält man hieraus die Cusanische Formel.

stens 20′. Lambert (1728—1777) hat aus der Newtonschen Formel folgende **Näherungsrektifikation** hergeleitet: Ist AE der zu rektifizierende Bogen (Fig. 9) und $BC = OB$, so verschiebt man den (Snelliusschen) Rektifikationspunkt C um $\frac{AF}{5}$ nach dem Mittelpunkt des Kreises hin bis P. Zieht man PE, so ist $AQ \approx x$. Wird $\sphericalangle EOA = x$ und der Kreisradius $= 1$ gesetzt, dann ergibt sich aus der Proportion

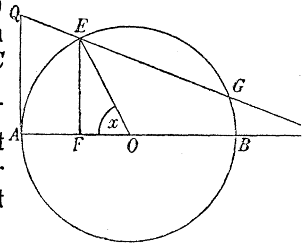

Fig. 9.

$$AQ : EF = PA : PF$$

$$AQ : \sin x = \left[3 - \tfrac{1}{5}(1 - \cos x)\right] : \left[3 - \tfrac{6}{5}(1 - \cos x)\right],$$

folglich $\dfrac{AQ}{\sin x} = \dfrac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x} \approx \dfrac{x}{\sin x}$, somit $AQ \approx x$.

10. BERECHNUNG VON π DURCH UNENDLICHE REIHEN

James Gregory (1638—1735), der von Newtons Ergebnissen erfuhr, fand nach vielen vergeblichen Anstrengungen 1670 die *arctan-Reihe*, die in unserer heutigen Schreibweise die Form hat:

(1) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1).$

Setzt man $x = 1$, so erhält man, da $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, die zuerst von Leibniz 1673 selbständig gefundene und deshalb mit Recht nach ihm benannte Reihe für $\frac{\pi}{4}$:

(2) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

Für die praktische Berechnung der Zahl π ist diese Reihe wegen ihrer überaus langsamen Konvergenz durchaus ungeeignet. Um π nur auf 2 Dezimalen genau zu bekommen, braucht man etwa 300 Glieder; zur Berechnung von 20 Dezimalstellen sind nach Newton $5 \cdot 10^9$ Glieder nötig, während die uns bereits bekannte arcsin-Reihe

(3) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

für $x = \frac{1}{2}$, also $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ die wesentlich stärker konvergierende und daher rascher zum Ziel führende Reihe gibt

$$(4) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \cdots.$$

Diese Reihe liefert schon mit etwa 30 Gliedern 20 Dezimalstellen. Newton berechnete aus ihr π auf 14 Stellen.

Setzt man in der arctan-Reihe $x = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird $\arctan x = \frac{\pi}{6}$ und man erhält eine zur Berechnung von π noch geeignetere Reihe

$$(5) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \cdots\right).$$

Aus dieser Reihe berechnete der englische Astronom Abraham Sharp (1651–1742) nach der Anweisung des bekannten Astronomen Halley um 1700 die Zahl π auf 72 Dezimalen; 1719 veröffentlichte de Lagny 127 Dezimalen, deren Berechnung nach der Ansicht von Euler, der doch als Sachverständiger gelten darf, eine „unglaubliche Mühe" verursacht haben mußte.

Ein Vergleich der arcsin-Reihe mit der arctan-Reihe zeigt, daß sich die letztere Reihe ihrer einfacheren Zahlenkoeffizienten wegen zur Berechnung von π viel besser eignet. Es handelt sich nur darum, die arctan-Reihe derart umzuformen, daß wenige Glieder genügen, um für π eine verhältnismäßig große Zahl von richtigen Stellen zu bekommen.

Aus $$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

folgt mit $\tan\alpha = u$ und $\tan\beta = v$, woraus $\alpha = \arctan u$, $\beta = \arctan v$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{u + v}{1 - uv} = \tan(\arctan u + \arctan v),$$

$$(*) \quad \text{also} \quad \arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}.$$

Diese Gleichung stellt das **Additionstheorem der arctan-Funktion** dar.

Bestimmt man nun u und v als echte Brüche so, daß

(**) $\frac{u+v}{1-uv} = 1$ wird, so ist, da $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = \arctan u + \arctan v$$

$$= \left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots\right) + \left(v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + \cdots\right).$$

Zur Bestimmung von u als Funktion von v benützen wir die Gleichung (**). Aus ihr folgt

$$u + v = 1 - uv, \quad \text{also} \quad u = \frac{1-v}{1+v}.$$

Hieraus kann zu jedem Wert von v der entsprechende Wert von u berechnet werden. Je kleiner die Brüche u und v sind, desto rascher konvergiert die Reihe. Setzt man z. B. $v = \frac{1}{2}$, so wird $u = \frac{1}{3}$ und wir erhalten die Eulersche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \tag{6}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + - \cdots\right)$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + - \cdots\right).$$

Aus dieser Reihe lassen sich durch wiederholte Anwendung der Formel (*) noch weitere ähnliche Formeln herstellen. Setzen wir, um für $\arctan\frac{1}{2}$ rascher konvergierende Reihen zu erhalten, $\frac{u+v}{1-uv} = \frac{1}{2}$, so erhalten wir z. B. aus $u = \frac{1}{3}$ für v den Wert $v = \frac{1}{7}$, so daß

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{}{7}.$$

Damit geht (6) über in

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}. \tag{7}$$

Da ferner $\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$,

so ergibt sich damit aus (7)

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{8}. \tag{8}$$

Wir fügen noch ohne Beweis zwei von C. F. Gauß (1777–1855), dem größten deutschen Mathematiker, angegebene Formeln bei, die sich gut zur Berechnung von π eignen:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{38} + 20 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} + 24 \arctan \frac{1}{268}.$$

Euler, dem man eine große Anzahl von Reihenentwicklungen für π verdankt, stellte die Formel auf

$$(9) \qquad \frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$$

und benützte zur Berechnung der arctan-Reihen die ebenfalls von ihm aufgestellte Reihe

$$(10) \quad \arctan t = \frac{t}{1+t^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^3 + \cdots \right\}.$$

Mit Hilfe dieser letzten Reihe ergibt sich zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ eine sehr bequeme Reihe. Mit $t = \frac{1}{7}$ wird $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$; $t = \frac{3}{79}$ liefert $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$. Damit hat man die Reihe

$$(11) \; \pi = \frac{28}{10} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{100} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \left(\frac{2}{100} \right)^3 + \cdots \right\} + \frac{30\,336}{100\,000} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{144}{100\,000} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \left(\frac{144}{100\,000} \right)^2 + \cdots \right\}.$$

Mit ihrer Hilfe berechnete Euler nach seiner Angabe in einer Stunde π auf 20 Dezimalen.

Zur wirklichen numerischen Berechnung von π, die der Leser wohl erwarten wird, benützen wir die von Machin 1706 aufgestellte Formel

$$(12) \qquad \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

der mit ihrer Hilfe die Zahl π auf 100 Dezimalen berechnete. Diese Formel ist für die numerische Berechnung sehr geeignet; in der ersten Reihe ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ und die zweite Reihe konvergiert außerordentlich rasch.

Mit $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, also $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ erhält man

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12} \text{ und } \tan 4\alpha = \frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Hiermit kommt $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$,

also $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$, oder $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \arctan\frac{1}{239}$,

oder, da $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$,

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}. \tag{12}$$

Um aus der ersten Reihe $4\arctan\frac{1}{5}$ eine rascher konvergierende Reihe zu erhalten, hat Buzengeiger (1771—1835) sie in folgender Weise umgeformt. Aus $\tan\alpha' = \frac{1}{10}$ folgt

$$\tan 2\alpha' = \tan 2\cdot\frac{1}{10} = \frac{2\cdot\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99},$$

also $$\tan(2\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{20}{99}-\frac{1}{5}}{1+\frac{20}{99}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{1}{515},$$ woraus

$$\alpha = 2\alpha' - \arctan\frac{1}{515} = 2\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{515} = \arctan\frac{1}{5}.$$

Setzt man diesen Wert in (12) ein, so ergibt sich als gesuchte Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - 4\arctan\frac{1}{515} - \arctan\frac{1}{239}. \tag{13}$$

Setzen wir $$\frac{\pi}{4} = 8A - 4B - C,$$

also $A = \arctan\frac{1}{10}$, $B = \arctan\frac{1}{515}$, $C = \arctan\frac{1}{239}$,

so genügen bei der ersten Reihe 4 Glieder, bei den beiden anderen je 2 Glieder, um π auf 7 Dezimalen genau zu berechnen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{10} &= 0{,}100\ 000\ 000 & \tfrac{1}{515} &= 0{,}001\ 941\ 747\\
\tfrac{1}{5\cdot 10^2} &= 0{,}000\ 002\ 000 & -\tfrac{1}{3\cdot 515^3} &= 0{,}000\ 000\ 002\\
-\tfrac{1}{3\cdot 10^3} &= 0{,}000\ 333\ 333 & B &= 0{,}001\ 941\ 745\\
-\tfrac{1}{7\cdot 10^7} &= 0{,}000\ 000\ 014 & \tfrac{1}{239} &= 0{,}004\ 184\ 100\\
A &= 0{,}099\ 668\ 653 & -\tfrac{1}{3\cdot 239^3} &= -0{,}000\ 000\ 024\\
& & C &= 0{,}004\ 184\ 076.
\end{aligned}$$

Damit wird $\frac{\pi}{4} \approx 8A - 4B - C = 0{,}785\ 398\ 168,$

also $\pi \approx 3{,}141592672.$

Der Wert für A ist um höchstens 2 Einheiten zu groß, B und C je um eine Einheit, also $8A - 4B - C$ um höchstens 21 Einheiten, das 4fache um höchstens 84 Einheiten, d. h. der gesuchte Wert für π liegt zwischen 3,141592672 und 3,141592588: der von uns gefundene Wert ist also auf 7 Dezimalen richtig.

Nach der Formel (7) berechnete Vega (1756–1802) 140 Stellen. William Rutherford erhöhte 1841 die Stellenzahl auf 208 (davon 152 richtige) aus

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99}.$$

Der Hamburger Rechenkünstler Zacharias Dahse fand nach der Formel $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$, die ihm von dem Wiener Mathematiker v. Schulz 1844 angegeben wurde, in kaum 2 Monaten π auf 200 Dezimalen. Rutherford gab 1853 440 Stellen, Professor Richter in Elbing veröffentlichte 1855 500 Stellen, der englische Mathematiker W. Shanks 1874 sogar 707 Stellen auf Grund der Machinschen Formel. Einen praktischen Wert haben diese Berechnungen auf so viele Dezimalstellen nicht; sie zeigen nur, in welch hervorragender Weise die neueren Rechnungsmethoden denen aus älterer Zeit überlegen sind. Ist z. B. π auf nur 25 Dezimalen richtig, so könnte damit der Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich dem Abstand des Mittelpunkts der Erde von dem uns nächsten Fixstern ist, auf $\frac{1}{1000\,000}$ mm genau berechnet werden. Welche Genauigkeit schon in 100 Stellen liegt, vermag sich der menschliche Geist überhaupt nicht vorzustellen.

Für die ersten 30 Dezimalen besitzen die Franzosen einen **Merkvers**, der, ebenso wie die nicht gerade lyrisch anmutende deutsche Übersetzung, durch die Zahl der Buchstaben der aufeinanderfolgenden Worte der Reihe nach die Dezimalstellen der Zahl π liefert:

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
3 2 3 8 4 6 2 6
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
4 3 3 8 3 2 7 9
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

In deutscher Übersetzung;

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie!
Wie viele Tausende bewundern Geister,
Himmlisch wie du und göttlich! —
Noch reiner in Äonen
Wird das uns strahlen,
Wie im lichten Morgenrot!

Wesentlich besser ist der von Weinmeister 1878 verfaßte Merkvers:

Wie o! dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!

Wir fügen noch den Wert von π auf 40 Dezimalen bei:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ldots$$

Ehe wir diesen Abschnitt der analytischen Ausmittlung des Wertes von π abbrechen, wollen wir noch einer **Wahrscheinlichkeitsmethode** gedenken, die um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts Professor R. Wolf in Zürich angewandt hat. Ein Fußboden sei nach Art des Schachbretts in lauter gleich große quadratische Felder zerlegt. Wird eine Nadel, die so lang ist wie die Seite jedes quadratischen Feldes, wahllos auf diesen Fußboden geworfen, so wird sie zuweilen ganz innerhalb eines Feldes zu liegen kommen, ohne irgendeine der Parallelen zu schneiden, welche das quadratische Netz bilden. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies zutrifft, berechnet sich auf $\frac{\pi - 3}{\pi}$. Wiederholt man den Versuch genügend oft, so ergibt sich ein Näherungswert für π. Nach 10000 Versuchen erhielt Wolf π auf 3 Dezimalstellen richtig.

11. DER BUCHSTABE π

Der ausschließliche Gebrauch des Buchstabens π als Bezeichnung für die Größe des Verhältnisses von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser ist jedem, der sich einmal und sei es auch nur als Schüler mit Mathematik befaßt hat, so vertraut, daß man meinen könnte, dieses Verhältnis sei immer so bezeichnet worden. Dem ist aber nicht so. Der Buchstabe π tritt in seiner gegenwärtigen Bedeutung zum erstenmal bei William Jones 1706 auf in dessen Synopsis palmariorum Mathesos, einer Einleitung in die Mathematik. Es ist wahrscheinlich, daß Jones zur Wahl dieses Buchstabens durch eine abkürzende Bezeichnung veranlaßt wurde, die sich zuerst in der 3. Auflage eines 1667 erschienenen Elementarbuchs der Mathematik von dem englischen Landpfarrer Oughtred (1574—1660) für den Halbkreis (semiperipheria) findet. Dort steht nämlich die Proportion

$$7 : 22 = \delta : \pi = 133 : 355,$$

wobei δ eine Abkürzung für Halbmesser (semidiameter) bedeutet. Merkwürdigerweise fand der Vorschlag von Jones anfänglich keine Gnade vor den Augen der Fachgelehrten, die meist den Buchstaben p benützten. Erst Euler wandte von 1737 an durchgängig die neue Bezeichnung an. Infolge seines ausgedehnten Briefwechsels mit anderen Mathematikern und besonders durch sein weit verbreitetes, 1748 erschienenes Hauptwerk „Introductio in analysin infinitorum" fand das neue Symbol allgemein Eingang in die Mathematik.

12. NÄHERUNGSKONSTRUKTIONEN

Aus dem Näherungswert $3\frac{1}{7}$ lassen sich weitere Näherungswerte folgendermaßen ableiten. Seit Archimedes ist bekannt, daß $\pi < 3\frac{1}{7}$. Nehmen wir nun in den Brüchen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{3}{21}$, $\frac{4}{28}$, usw. je statt des Nenners die um 1 größere Zahl, so erhalten wir die folgende Reihe von Näherungswerten:

$$\frac{1}{8};\ \frac{2}{15};\ \frac{3}{22};\ \frac{4}{29};\ \frac{5}{36};\ \frac{6}{43};\ \frac{7}{50};\ \frac{8}{57};\ \frac{9}{64};\ \frac{10}{71};\ \frac{11}{78};\ \frac{12}{85};\ \frac{13}{92};\ \frac{14}{99};\ \frac{15}{106};\ \frac{16}{113};\ \frac{17}{120};\ \cdots$$

Von diesen Näherungswerten sind uns bereits bekannt $\frac{1}{8}$ (Vitruv und Dürer); $\frac{10}{71}$ (Archimedes); $\frac{16}{113}$ (Adrian Anthonisz), $\frac{17}{120}$ (Ptolemäus).

Zwei Werte der Reihe lassen eine einfache **Näherungskonstruktion** zu, deren Ausführung wir dem Leser überlassen. Es ist

$$3\tfrac{5}{36} = 3{,}139\cdots = 3 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2$$

$$\text{und } 3\tfrac{9}{64} = 3{,}1406\cdots = 3 + \left(\tfrac{3}{8}\right)^2.$$

Die Konstruktion für den Näherungswert $3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$ ist bereits auf S. 30 angeführt.

Euler hat (1737) die Formel abgeleitet

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots, \tag{1}$$

die für $x = \frac{\pi}{2}$ die bereits bekannte Vietasche Formel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{90^0}{2}\cdot\cos\frac{90^0}{4}\cdot\cos\frac{90^0}{8}\cdots}$$

liefert. Zum Beweis dieser Formel schlagen wir folgenden Weg ein. Es ist

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \qquad \text{also}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}. \tag{2}$$

Setzt man in diesem Ausdruck der Reihe nach für x die Werte $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \cdots$ so erhält man

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}; \quad \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}};$$

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}}{\frac{x}{8}}; \cdots \quad \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Das Produkt dieser n Gleichungen liefert

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Nun ist bekanntlich $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \lim\limits_{\xi=0}\frac{\sin\xi}{\xi} = 1,$

also erhalten wir für den Ausdruck $\frac{\sin x}{x}$ das unendliche Produkt

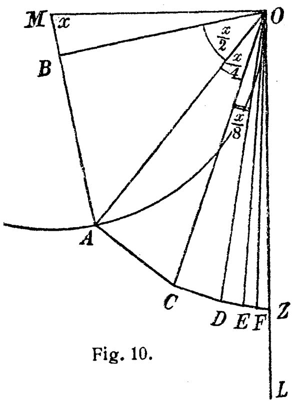

Fig. 10.

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots$$

Diese Formel liefert eine einfache **Konstruktion** für die **Rektifikation des Kreises** oder **eines Kreisbogens**, die zuerst von Fontana 1784 angegeben wurde, jedoch bis in die neueste Zeit in nur wenig verschiedenen Formen wiederholt aufgefunden worden ist.

Um den Kreisbogen OA (Mittelpunkt M) zu rektifizieren (Fig. 10), errichtet man in O auf OM das Lot OL und zieht OA. Halbiert man den Winkel AOL durch OC, $\sphericalangle COL$ durch OD usw. und ist $AC \perp OA$, $CD \perp OC$, $DE \perp OD$ usf., so erhält man schon nach wenigen Halbierungen einen

Punkt Z als Schnittpunkt des zuletzt errichteten Lots mit OL, der auch bei noch so genauer Zeichnung zusammenfällt mit dem Schnittpunkt von OL mit dem Kreisbogen, der um O beschrieben wird mit einem Radius gleich der Länge der zuletzt konstruierten Winkelhalbierenden.

Soll der Halbkreis rektifiziert werden, so ist $x = \pi$, also $\sin x = 0$, $\cos \frac{x}{2} = 0$: die Formel (1) liefert also keine Konstruktion. Man rektifiziert daher den Viertelkreis. Dessen Umfang (Bogen x) ist $\frac{x}{2}$, der dazu gehörige Zentriwinkel $x = 90^0$. Die Richtigkeit unserer Konstruktion ergibt sich aus folgender Betrachtung. Setzen wir $OM = r = 1$ und ist $\sphericalangle\, OMB = x$, so ist $\sphericalangle\, AOL = \sphericalangle\, AOB = \frac{x}{2}$; ferner $\sphericalangle\, AOC = \frac{x}{4}$, $COD = \frac{x}{2}$, usf. Im rechtwinkligen $\triangle\, AOB$ ist $OA = \frac{OB}{\cos \frac{x}{2}}$, woraus mit $OB = \sin x$ sich ergibt $OA = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}}$,

also
$$OC = \frac{OA}{\cos \frac{x}{4}} = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4}},$$

$$OD = \frac{OC}{\cos \frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8}} \text{ usw.,}$$

so daß schließlich
$$OZ = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \cos \frac{x}{16} \cdots} = x.$$

Eine große Anzahl von **Näherungskonstruktionen** stammt aus neuerer Zeit. Wir beschränken uns auf eine Auslese, indem wir auf die sehr reichhaltigen Literaturangaben bei Max Simon (s. Lit. Verz. Nr. 6) und Theodor Vahlen (s. Lit. Verz. Nr. 8) hinweisen. Die älteste und zugleich eine der genauesten ist die von Adam Kochansky, Mathematiker des Königs von Polen, aus dem Jahre 1685. Sie hat den Vorzug, daß man mit *einer* Zirkelöffnung auskommt. An den Kreis vom Halbmesser $AC = 1$ wird im Punkt B die Tangente gezogen (Fig. 11). Errichtet man über $BF = BC$ das Mittellot CG, welches die Tangente in D schneidet, und macht man $DE = 3BC$, so ist AE annäherungsweise gleich dem halben Kreisumfang.

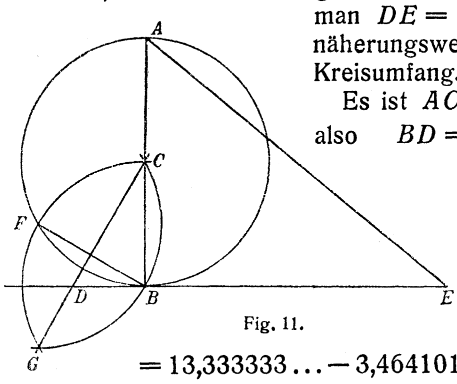

Fig. 11.

Es ist $AC = CB = BF = 1$, also $BD = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, folglich

$$AE^2 = AB + BE^2$$
$$= 2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= \frac{40}{3} - 2\sqrt{3}$$
$$= 13{,}333333\ldots - 3{,}4641016\ldots = 9{,}8692317\ldots,$$

also wird durch $AE = \sqrt{9{,}8692317\ldots} = 3{,}141533\ldots$

der Wert von π auf 4 Dezimalen genau dargestellt. Der Fehler beträgt etwa $0{,}00006 \cdot 2r$, also etwa $\frac{1}{10\,000}$ des Kreisradius.

Diese Näherungskonstruktion wurde wiederholt als neu ausgegeben, so 1797 von Lorenzo Mascheroni u. a.

Zieht man zwei aufeinander senkrechte Kreishalbmesser MA und MB, und teilt AB im Verhältnis 1 : 4 in C und verlängert man $AC = \frac{1}{5} AB$ um das 6fache des Halbmessers MA bis D, so ist $AD \approx 2\pi r \approx \left(\frac{1}{5}\sqrt{2} + 6\right) r = 2r\left(3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}\right) = r \cdot 3{,}14142\ldots$

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete $\frac{3}{5}d$ und dessen andere Kathete $\frac{2}{5}d$ ist, wo d der Kreisdurchmesser ist. Dann ist der Umfang u dieses Dreiecks $u \approx 2\pi r \approx 2r\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{45}\right) = 2r \cdot 3{,}14164\ldots$ (Die Figuren zu den beiden letztgenannten Konstruktionen möge sich der Leser selbst entwerfen.)

Wir fügen noch einige Formeln an, die Näherungskonstruktionen von π liefern, deren geometrische Ausführung wir teilweise dem Leser überlassen. Es ist

$$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1463\ldots$$

($\sqrt{2}$ ist die Seite des einbeschriebenen Quadrats, $\sqrt{3}$ die des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks),

$$\pi \approx \sqrt{51} - 4 = 3{,}14141\ldots,$$

$$\frac{\pi}{4} \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} = 0{,}7861\ldots \text{ (statt } 0{,}78539\ldots);$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \text{ ist die Zehnecksseite}\right).$$

$$\frac{\pi}{2} \approx 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1{,}5773\ldots \text{ (statt } 1{,}5707\ldots).$$

Zur näherungsweisen Rektifikation eines Kreisbogens fügen wir noch die von Rankine angegebene Konstruktion bei: Ist AB der zu rektifizierende Bogen des Kreises vom Halbmesser $MA = r$, so verlängere man AB um $BC = \frac{1}{2}AB$, ziehe in B die Kreistangente und beschreibe um C mit Halbmesser CA einen Kreisbogen, der die Tangente in D schneidet. Dann ist $\overline{BD} \approx$ Bogen AB. — Ist $\sphericalangle AMB = 2\alpha$, so ist

$$\begin{aligned} BD &= r\sin\alpha\left(\sqrt{9-\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \\ &= 3r\sin\alpha\left(\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{3}\right)^2} - \cos\alpha\right), \end{aligned}$$

woraus sich durch Benutzung der Reihen für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ergibt $BD \approx r\left(\alpha - \frac{4}{135}\alpha^5\right)$. Der Fehler beträgt für $\alpha = 30^0$, also $2\alpha = 60^0$, etwa $\frac{1}{1000}\,r$.

IV. DER ALGEBRAISCHE ZEITRAUM

13. BEWEIS DER IRRATIONALITÄT VON π

Bricht man den Kettenbruch

$$x = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}}$$

der Reihe nach beim 2., 3., 4., … Partialnenner $a_2, a_3, a_4, \ldots$ ab, so erhält man Näherungswerte des Kettenbruchs, die wir mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \cdots$ bezeichnen wollen. Dabei ist, wie man leicht durch Ausrechnen bestätigen kann,

$$\begin{aligned}
p_1 &\equiv a_1;\\
p_2 &\equiv a_1 a_2 + b_1 = p_1 a_2 + b_1;\\
p_3 &\equiv a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2 = (a_1 a_2 + b_1) a_3 + a_1 b_2\\
&= p_2 a_3 + a_1 b_2;\\
p_4 &\equiv a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 b_1 a_4 + a_1 b_2 a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3\\
&= (a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2) a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3\\
&= p_3 a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_1 &\equiv 1;\\
q_2 &\equiv a_2 = q_1 a_2;\\
q_3 &\equiv a_2 a_3 + b_2 = q_2 a_3 + b_2;\\
q_4 &\equiv a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + a_2 b_3 = (a_2 a_3 + b_2) a_4 + a_2 b_3\\
&= q_3 a_4 + a_2 b_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist der erste Näherungswert $a_1 < x$, der zweite $> x$, der dritte $< x$ usf. Bildet man die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{b_1}{a_2}; \quad \frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)};$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} = \frac{-b_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)\,(a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + a_2 b_3)}; \text{ usw.,}$$

so läßt sich nach dem oben Gesagten der Wert des Kettenbruches durch die unendliche Reihe darstellen:

$$x = a_1 - \frac{b_1}{a_2} + \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)} - \frac{b_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)\,(a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + a_2 b_3)} + - \cdots \tag{1}$$

Bricht der Kettenbruch mit einer endlichen Zahl von Nennern ab, so liefert (1) eine endliche Reihe; hat dagegen der

Kettenbruch eine unendlich große Anzahl von Gliedern, so erhalten wir eine unendliche Reihe.

Mittels unserer bisherigen Darlegung können wir aber auch umgekehrt jede unendliche Reihe von der Form

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + - \cdots \tag{2}$$

in einen Kettenbruch verwandeln. Die gliedweise Vergleichung von (1) und (2) liefert

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots 1; \quad a_1 = 0; \; a_2 = A; \quad A(A a_3 + 1) = B;$$
$$B(B a_4 + 1) = C; \text{ usf.}$$

Hieraus folgt $\quad a_2 = A; \; a_3 = \dfrac{B - A}{A^2}, \; a_4 = \dfrac{C - B}{B^2}$, usf.

Damit erhält man für die Reihe (2) den Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{(B - A) + \cfrac{B^2}{(C - B) + \cfrac{C^2}{(D - C) + \ddots}}}} \tag{3}$$

Diese Entwicklung gestattet uns, die uns bekannte *Reihe*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

in der Form eines Kettenbruchs zu schreiben Man erhält nämlich $\quad A = 1, \; B = 3, \; C = 5, \; D = 7, \cdots \quad$ und damit

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}$$

Hieraus folgt übrigens durch Umkehrung die schon früher (S. 35) erwähnte Formel von Brouncker:

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Da der Kettenbruch unendlich viele Glieder hat, so *muß* $\frac{\pi}{4}$ *eine irrationale Größe* sein. Wäre $\frac{\pi}{4}$ nicht irrational, so müßte der Kettenbruch bei irgendeinem Gliede abbrechen.

Lambert hat ferner bewiesen, daß der Kettenbruch

$$\tan\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ddots}}}}$$

irrational ist. Setzt man hierin $m = x$ und $n = 1$, so wird

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

Mit $x = \pi$ bekommt man nach dem Vorgang des Franzosen Legendre (1752–1833)

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}}}, \qquad \text{also} \quad 3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}$$

Wäre nun π^2 einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ gleich, so wäre

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7n - \cfrac{m}{9n - \ddots}}},$$

was nach dem bereits Gesagten unmöglich ist. Im 19. Jahrhundert hat Gauß einen neuen, strengen Beweis für die Irrationalität von π erbracht.

Damit war nun die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal um ein bedeuten-des, wenn auch in negativer Richtung, gefördert worden. Obwohl eine ganze Anzahl irrationaler Zahlen, z. B. sämtliche Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so *grenzte* doch jetzt schon *die Wahrscheinlichkeit, daß die Quadratur des Kreises mit diesen Hilfsmitteln unmöglich* ist, *fast an Gewißheit.* Bei den meisten Mathematikern hatte sich schon lange die Überzeugung gebildet, daß π eine transzendente Zahl ist. Der Franzose de Lagny stellte in einer 1719 veröffentlichten Abhandlung den Satz auf: „Wenn der tangens eines Bogens eine rationale Zahl ist, so ist der Bogen selbst irrational", ohne jedoch einen strengen Beweis hierfür zu erbringen. Doch diente dieser Satz später Lambert als Ausgangspunkt für seinen Beweis der Irrationalität von π. In einer nach Eulers Tod erschienenen Abhandlung vom Jahr 1785 ist zu lesen: *„Die Ansicht scheint genügend befestigt zu sein, daß die Kreisperipherie*[1]) *eine so eigentümliche Art transzendenter Größen darstellt, daß sie mit keinen anderen Größen, seien es Wurzelgrößen oder andere Transzendenten, irgendwie sich vergleichen läßt."* Und Legendre gibt 1794 am Schluß einer sich mit diesem Gegenstand befassenden Abhandlung seiner Überzeugung mit den Worten Ausdruck: *„Es ist wahrscheinlich, daß die Zahl π nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, d. h. daß sie nicht Wurzel sein kann irgendeiner algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind.* Aber es scheint sehr schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen."

V. DIE ENDGÜLTIGE ERLEDIGUNG DES PROBLEMS

14. BEWEIS DER TRANSZENDENZ VON π

In der Tat dauerte es fast noch ein Jahrhundert, bis der Beweis für die Transzendenz von π erbracht wurde. Im Jahre 1873 bewies Hermite, daß die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, eine transzendente Zahl ist. Auf Grund des Hermiteschen Beweises, der sich auf gewisse

1) Im Kreis mit Radius $r = 1$ ist die Länge der Peripherie 2π.